

LUIZ BORTOLAN NETO

ANÁLISE NUMÉRICA DE DUTOS SUJEITOS À FLAMBAGEM

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Ciências, pelo Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia – Área de Mecânica Computacional, do Setor de Tecnologia e do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Roberto Dalledone Machado, D.Eng.

Co-Orientadora: Prof^a. Mildred Ballin Hecke, D.Sc.

CURITIBA

2009

TERMO DE APROVAÇÃO

LUIZ BORTOLAN NETO

ANÁLISE NUMÉRICA DE DUTOS SUJEITOS À FLAMBAGEM

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ciências pelo Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia – Área de Mecânica Computacional, Setor de Tecnologia e Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Orientador: Prof. Roberto Dalledone Machado, D.Eng.
Universidade Federal do Paraná

Co-Orientadora: Prof^ª. Mildred Ballin Hecke, D.Sc.
Universidade Federal do Paraná

Prof. João Elias Abdalla Filho, Ph.D.
Pontifícia Universidade Católica do Paraná

Prof. Ramiro Brito Willmersdorf, Ph.D.
Universidade Federal de Pernambuco

Curitiba, 10 de Março de 2009.

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

À Deus.

Aos meus pais, Gabriel e Rita de Cássia, pela amizade e companheirismo e por terem me dado todo o apoio necessário, sem o qual seria impossível a realização deste trabalho.

Aos meus irmãos, Julio Cezar e Juliana, pela amizade.

Ao Prof. Roberto Dalledone Machado pela credibilidade em mim depositada, pela contribuição no desenvolvimento deste trabalho e pela amizade e companheirismo.

À Maristela Bandil pela amizade e companheirismo, e por não deixar que eu desistisse.

Ao Prof. Sérgio Scheer e à Prof^a. Mildred B. Hecke pela oportunidade e por terem acreditado em mim.

Ao Luiz Farani, cujo suporte foi fundamental para a realização deste trabalho.

Aos amigos de curso Luiz Farani, Luciano, Jorge, Leonardo, Emílio e Felipe pela amizade.

“A dor é temporária. Pode levar um minuto, uma hora, um dia, um ano, mas alguma hora será substituída por algo melhor. Se eu desistir, talvez dure para sempre.”

Lance Armstrong

Ciclista, 7 vezes campeão do *Tour de France*.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	viii
LISTA DE TABELAS	x
LISTA DE SÍMBOLOS	xii
RESUMO.....	xix
ABSTRACT	xx
1 INTRODUÇÃO.....	1
2 REVISÃO DA LITERATURA.....	4
2.1 COMPORTAMENTO E VIDA ÚTIL DE DUTOS	4
2.2 DUTOS SUJEITOS À FLAMBAGEM.....	7
3 ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO DE TRÊS NÓS.....	12
3.1 HIPÓTESES CINEMÁTICAS FUNDAMENTAIS.....	12
3.2 SISTEMAS DE REFERÊNCIA E FORMULAÇÃO LAGRANGEANA TOTAL INCREMENTAL	14
3.3 RELAÇÃO DEFORMAÇÃO – DESLOCAMENTO	18
3.4 PRESSÃO INTERNA.....	22
3.4.1 Pressão Constante.....	22
3.5 TEMPERATURA	24
3.6 MECÂNICA DE DUTOS ENTERRADOS	24
3.7 FORMULAÇÃO VARIACIONAL.....	26
3.8 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DO MATERIAL.....	27
3.8.1 Comportamento Elástico do Material.....	28
3.8.2 Comportamento Inelástico do Material (Elastoplasticidade).....	29
3.8.3 Avaliação dos Incrementos de Tensão	36
3.8.4 Relação Tensão – Deformação do Duto e Forças Internas	39
3.9 INTERAÇÃO SOLO – ESTRUTURA.....	41
3.9.1 Deformação das Molas de Representação do Solo	43
3.9.2 Relações Constitutivas das Molas de Representação do Solo.....	43
3.10 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO	45

3.10.1 Vetor de Deslocamentos Nodais	46
3.10.2 Matrizes Deformação–Deslocamento	48
3.10.3 Matriz de Rotação.....	51
3.10.4 Equações de Equilíbrio.....	52
4 FLAMBAGEM.....	55
4.1 FLAMBAGEM DE DUTOS AQUECIDOS	55
4.2 MODOS DE FLAMBAGEM	56
4.3 FLAMBAGEM DE DUTOS PARCIALMENTE E TOTALMENTE ENTERRADOS	57
4.4 TEORIA CLÁSSICA DE FLAMBAGEM DE COLUNAS.....	58
4.5 MÉTODO ANALÍTICO DE HOBBS PARA ANÁLISE DE FLAMBAGEM EM DUTOS.....	60
4.5.1 Flambagem no Plano Vertical	61
4.5.2 Flambagem no Plano Lateral.....	63
4.6 ANÁLISE NUMÉRICA DA CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM	65
4.6.1 Análise Não-Linear Incremental	66
4.6.2 Cálculo Linearizado da Carga de Flambagem	66
5 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	69
5.1 TUBULAÇÃO ENTERRADA EM ENCOSTA	70
5.2 CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM DE VIGAS	76
5.3 TEMPERATURA CRÍTICA DE FLAMBAGEM DE DUTOS APOIADOS SOBRE SOLO ARGILOSO	82
5.3.1 Resultados Obtidos com a Aplicação do Método de Hobbs	85
5.3.2 Resultados Obtidos com a Análise Não-Linear Incremental	86
5.3.3 Discussão dos Resultados.....	88
5.4 CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM DE UMA TUBULAÇÃO DE ENCOSTA SUJEITA A DESLIZAMENTOS DE TERRA.....	89
6 CONCLUSÃO	94
REFERÊNCIAS	96
APÊNDICES	102

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1 – DUTO DEFORMADO APÓS FLAMBAGEM	1
FIGURA 1.2 – TUBULAÇÃO SUJEITA A DESLIZAMENTOS DE TERRA	2
FIGURA 2.1 – TÉCNICA DE ESTREITAMENTO LOCAL DA PAREDE DO DUTO	7
FIGURA 2.2 – SISTEMA <i>PIPE-IN-PIPE</i>	8
FIGURA 3.1 – DEFORMAÇÕES DE VIGA EXCLUINDO O EFEITO DO CISALHAMENTO	13
FIGURA 3.2 – SISTEMAS DE COORDENADAS GLOBAL E LOCAL	15
FIGURA 3.3 – DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO	34
FIGURA 3.4 – SUPERFÍCIE DE ESCOAMENTO DE VON MISES	37
FIGURA 3.5 – SEÇÃO TRANSVERSAL DIVIDIDA EM FAIXAS.....	38
FIGURA 3.6 – FLUXOGRAMA PARA AVALIAÇÃO DOS INCREMENTOS DE TENSÃO	39
FIGURA 3.7 – MODELO DE INTERAÇÃO SOLO – ESTRUTURA.....	42
FIGURA 3.8 – DIAGRAMA FORÇA–DEFORMAÇÃO PARA AS MOLAS TRANSVERSAIS	44
FIGURA 3.9 – DIAGRAMA FORÇA–DEFORMAÇÃO PARA AS MOLAS AXIAIS.....	44
FIGURA 3.10 – ELEMENTO FINITO.....	46
FIGURA 4.1 – DESENHO ESQUEMÁTICO DA ATUAÇÃO DA FORÇA NORMAL DEVIDO AO AQUECIMENTO	56
FIGURA 4.2 – MODOS DE FLAMBAGEM QUE UM DUTO PODE ASSUMIR.....	57
FIGURA 4.3 – TUBULAÇÃO SUJEITA A DESLIZAMENTOS DE TERRA	58
FIGURA 4.4 – COLUNA EM EQUILÍBRIO INSTÁVEL	59
FIGURA 4.5 – COMPRIMENTO EFETIVO DE FLAMBAGEM PARA DIFERENTES CONDIÇÕES DE CONTORNO	60
FIGURA 4.6 – DETALHES DA FLAMBAGEM VERTICAL.....	61
FIGURA 5.1 – MODELO DO DUTO SIMULADO	70
FIGURA 5.2 – MALHA DE ELEMENTOS FINITOS	71
FIGURA 5.3 – DIAGRAMA COMPARATIVO DOS DESLOCAMENTOS VERTICAIS NODAIS DA ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA.....	75
FIGURA 5.4 – TENSÕES NA SEÇÃO TRANSVERSAL DO NÓ 11 (AN. NÃO LINEAR GEOM.).....	76
FIGURA 5.5 – SEÇÃO TRANSVERSAL DA VIGA E CONDIÇÕES DE CONTORNO CONSIDERADAS.....	77

FIGURA 5.6 – MODOS DE FLAMBAGEM DA VIGA BI-APOIADA.....	81
FIGURA 5.7 – MODOS DE FLAMBAGEM DA VIGA ENGASTADA EM UMA EX- TREMIDADE E APOIADA NA OUTRA	81
FIGURA 5.8 – MODOS DE FLAMBAGEM DA VIGA BI-ENGASTADA	81
FIGURA 5.9 – MODOS DE FLAMBAGEM DA VIGA LIVRE EM UMA EXTREMI- DADE E ENGASTADA NA OUTRA	82
FIGURA 5.10 – MODELO DO DUTO SIMULADO	82
FIGURA 5.11 – MALHA DE ELEMENTOS FINITOS	87
FIGURA 5.12 – MALHA DE ELEMENTOS FINITOS	90
FIGURA 5.13 – CASO 1: DUTO TOTALMENTE ENTERRADO	91
FIGURA 5.14 – CASO 2: DUTO PARCIALMENTE ENTERRADO	92
FIGURA 5.15 – CASO 3: DUTO TOTALMENTE DESCOBERTO	92

LISTA DE TABELAS

TABELA 4.1 – CONSTANTES CORRESPONDENTES AOS QUATRO MODOS DE FLAMBAGEM	64
TABELA 5.1 – PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS	70
TABELA 5.2 – PROPRIEDADES MATERIAIS	71
TABELA 5.3 – CARREGAMENTOS EXTERNOS AO LONGO DA TUBULAÇÃO	72
TABELA 5.4 – VALORES NODAIS DOS DESLOCAMENTOS VERTICAIS E DAS ROTAÇÕES OBTIDOS NA ANÁLISE LINEAR ELÁSTICA	73
TABELA 5.5 – VALORES NODAIS DOS DESLOCAMENTOS AXIAIS E VERTICAIS OBTIDOS NA ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA.....	74
TABELA 5.6 – TENSÃO MÁXIMA OBTIDA PARA O NÓ 11	76
TABELA 5.7 – PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS	77
TABELA 5.8 – PROPRIEDADES MATERIAIS	77
TABELA 5.9 – CARGAS CRÍTICAS DE FLAMBAGEM SEGUNDO FORMULAÇÃO DE EULER.....	78
TABELA 5.10 – CARGAS CRÍTICAS DE FLAMBAGEM OBTIDAS COM O CÁLCULO LINEARIZADO – PRESENTE TRABALHO.....	78
TABELA 5.11 – CARGAS CRÍTICAS DE FLAMBAGEM OBTIDAS COM A ANÁLISE NÃO-LINEAR INCREMENTAL SEM CONSIDERAR A NÃO-LINEARIDADE MATERIAL	79
TABELA 5.12 – ERRO DAS ANÁLISES NUMÉRICAS	79
TABELA 5.13 – CARGAS CRÍTICAS DE FLAMBAGEM OBTIDAS COM A ANÁLISE NÃO-LINEAR INCREMENTAL CONSIDERANDO A NÃO-LINEARIDADE MATERIAL	80
TABELA 5.14 – PROPRIEDADES MATERIAIS DO DUTO	83
TABELA 5.15 – PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DO DUTO	83
TABELA 5.16 – REAÇÕES DO SOLO AOS DESLOCAMENTOS AXIAL E LATERAL DO DUTO	84
TABELA 5.17 – CONSTANTES DE RIGIDEZ DE MOLA CONSIDERADAS	84
TABELA 5.18 – TEMPERATURA CRÍTICA DE FLAMBAGEM NO PLANO VERTICAL SEGUNDO O MÉTODO DE HOBBS	85
TABELA 5.19 – TEMPERATURA CRÍTICA DE FLAMBAGEM NO PLANO LATERAL SEGUNDO O MÉTODO DE HOBBS MODIFICADO PARA PENETRAÇÃO DE 0.10 M	86

TABELA 5.20 – TEMPERATURA CRÍTICA DE FLAMBAGEM NO PLANO LATERAL SEGUNDO O MÉTODO DE HOBBS MODIFICADO PARA PENETRA- ÇÃO DE 0.25 M	86
TABELA 5.21 – TEMPERATURA CRÍTICA DE FLAMBAGEM NO PLANO LATERAL SEGUNDO O MÉTODO DE HOBBS MODIFICADO PARA PENETRA- ÇÃO DE 0.50 M	86
TABELA 5.22 – TEMPERATURA CRÍTICA DE FLAMBAGEM OBTIDA ATRAVÉS DA ANÁLISE NÃO-LINEAR INCREMENTAL PARA PENETRAÇÃO DE 0.10 M.....	87
TABELA 5.23 – TEMPERATURA CRÍTICA DE FLAMBAGEM OBTIDA ATRAVÉS DA ANÁLISE NÃO-LINEAR INCREMENTAL PARA PENETRAÇÃO DE 0.25 M.....	87
TABELA 5.24 – TEMPERATURA CRÍTICA DE FLAMBAGEM OBTIDA ATRAVÉS DA ANÁLISE NÃO-LINEAR INCREMENTAL PARA PENETRAÇÃO DE 0.50 M.....	88
TABELA 5.25 – PROPRIEDADES MATERIAIS DO DUTO	88
TABELA 5.26 – PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS	90
TABELA 5.27 – PROPRIEDADES MATERIAIS DO AÇO API X52	90
TABELA 5.28 – CARREGAMENTOS EXTERNOS AO LONGO DA TUBULAÇÃO.....	91
TABELA 5.29 – COMPARAÇÃO ENTRE OS CASOS ESTUDADOS	92

LISTA DE SÍMBOLOS

Romanas Minúsculas

d	Profundidade de penetração da base do duto no solo, tolerância
${}_0e_{ij}$	Deformações incremental linear referida à configuração no tempo 0
f_a	Força de atrito de Mohr-Coulomb
${}^{t+\Delta t}_0 f_i^B$	Componentes de forças aplicadas externamente por unidade de volume no tempo $t + \Delta t$
${}^{t+\Delta t}_0 f_i^S$	Trações de superfície aplicadas externamente por unidade de área no tempo $t + \Delta t$
h	Profundidade de aterro
h_i	Funções de interpolação ($i = 1, \dots, 15$)
$h_{i,x}$	Derivada primeira das funções de interpolação ($i = 1, \dots, 15$)
$h_{i,xx}$	Derivada segunda das funções de interpolação ($i = 1, \dots, 15$)
i_s	Fator de forma em função da área de carregamento sobre o solo
k_i	Constantes correspondentes aos modos de flambagem ($i = 1, \dots, 5$)
p_s	Pressão uniformemente distribuída sobre o solo
q_{solo}	Peso do solo por unidade de comprimento sobre o duto
r	Direção radial
r_i	Raio interno
r_e	Raio externo
r	Raio para o ponto em estudo
t	Tempo, espessura da parede do duto
Δt	Variação de tempo
u	Deslocamento na direção x_1
${}_t u_0$	Deslocamento do eixo centroidal na direção x_1 no tempo de referência t
\tilde{u}	Deslocamento na direção \tilde{x}_1
v	Deslocamento na direção x_2
${}_t v_0$	Deslocamento do eixo centroidal na direção x_2 no tempo de referência t
\tilde{v}	Deslocamento na direção \tilde{x}_2
w	Deslocamento na direção x_{13} , Peso submerso do duto
${}_t w_0$	Deslocamento do eixo centroidal na direção x_3 no tempo de referência t
\tilde{w}	Deslocamento na direção \tilde{x}_3
x	Direção longitudinal

x_1, x_2 e x_3	Direções do sistema de coordenadas locais
\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 e \tilde{x}_3	Direções do sistema de coordenadas globais
y	Recalque do solo, direção vertical
\hat{y}	Amplitude máxima de flambagem
\hat{y}'	Inclinação máxima
z	Direção lateral

Romanas Maiúsculas

A	Área da seção transversal
0A	Área inicial da seção transversal
$^tC^{EP}$	Módulo elásto-plástico no tempo t
$^0C_{ijrs}$	Componentes do tensor de relações constitutivas incremental no tempo t referido à configuração no tempo 0
C_{ijrs}^E	Componentes do tensor de relações constitutivas elástico
$C_{\theta \times l}$	Razão entre a deformação circunferencial e a deformação longitudinal
\overline{D}	Diâmetro médio do duto
D_e	Diâmetro externo do duto
D_i	Diâmetro interno do duto
E	Módulo de Young para o material do duto
E_s	Módulo de elasticidade do solo
E_T	Módulo tangente
F	Força
F_{eq}	Força axial equivalente
$^tF_{AS}$	Força de incremental da mola axial
$^tF_{BS}$	Força de incremental de compressão da mola de base
$^tF_{US}$	Força de incremental de compressão da mola superior
$^tF_{LLS}$	Força de incremental de compressão da mola lateral esquerda
$^tF_{RLS}$	Força de incremental de compressão da mola lateral direita
$^tF_{YAS}$	Força de escoamento da mola axial
$^tF_{YBS}$	Força de escoamento à compressão da mola de base
$^tF_{YUS}$	Força de escoamento à compressão da mola superior
$^tF_{YLLS}$	Força de escoamento à compressão da mola lateral esquerda
$^tF_{YRLS}$	Força de escoamento à compressão da mola lateral direita

H'	Módulo de encruamento
I	Momento de inércia da seção transversal
I_{x2}	Momento de inércia com relação ao eixo x_2
I_{x3}	Momento de inércia com relação ao eixo x_3
L	Comprimento total da viga ou da coluna
tL	comprimento do elemento finito no tempo t
L_f	Comprimento efetivo de flambagem
L_s	Comprimento do trecho reto não ancorado adjacente ao trecho fletido da configuração pós-flambagem do duto
${}^tL_{xy}$	comprimento da projeção do elemento finito no plano x_1 - x_2 no tempo t
${}_0^tK_i$	Coeficientes de rigidez para a seção transversal do duto ($i = 1, \dots, 6$)
\hat{M}	Máximo momento fletor, em $x = 0$
M_{eq1}	Momento equivalente em relação à x_3
M_{eq2}	Momento equivalente em relação à x_2
P	Força axial
P_{cr}	Carga crítica de flambagem
P_i	Pressão interna
R_{axi}	Reação do solo ao deslocamento axial do duto
R_{lat}	Reação do solo ao deslocamento lateral do duto
\bar{S}	Tensão efetiva
${}_0^t\bar{S}$	Tensão efetiva no tempo t
S_θ	Tensão tangencial, tensão circunferencial
${}_0^tS_{ij}$	Componentes do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff no tempo t referido à configuração no tempo 0
tS_m	Tensão média no tempo t
$S_{m\acute{a}x}$	Tensão máxima
S_p	Tensão longitudinal associada à tensão circunferencial
S_r	Tensão radial
S_R	Tensão de ruptura
S_{temp}	Tensão longitudinal devida à temperatura
S_u	Resistência não drenada do solo
${}_0^tS_x$	Tensão total no tempo t em relação à configuração de referência 0
S_{xl}	Tensão longitudinal
S_y	Tensão de escoamento
T	Temperatura

ΔT	Variação de temperatura
ΔT_f	Temperatura crítica de flambagem
ΔT_p	Acréscimo de temperatura equivalente ao efeito da pressão interna é calculado com a
ΔT_T	Temperatura máxima admissível no duto
0V	Volume do corpo sob consideração

Gregas Minúsculas

α	Coeficiente linear de dilatação térmica, ângulo
β	Parâmetro para definir ${}^t\mathbf{B}^S$
γ	Autovalor do problema de autovalores e autovetores
γ_s	Peso específico do solo
δ_{ij}	Delta de Kronecker
ε_θ	Deformação na direção circunferencial
${}_0^t\varepsilon^P$	Deformação plástica incremental no tempo t
${}_0^t\varepsilon_0^L$	Deformação incremental longitudinal no centróide do elemento no tempo t na configuração de referência
${}_0^t\varepsilon_0^L$	Deformação axial linear incremental
${}_0^t\varepsilon_0^{NL}$	Deformação axial não-linear incremental
${}^t\varepsilon_m$	Deformação média no tempo t
${}^t\varepsilon_{i,j}$	Componentes do o tensor de deformação de Green-Lagrange no tempo t
${}^t\varepsilon_{ij}^P$	Componentes do tensor de deformação plástica no tempo t
${}^t\varepsilon'_{ij}$	Componentes do tensor desviador de deformação no tempo t
$d\varepsilon_{rs}$	Componentes da deformação incremental total
$d\varepsilon_{rs}^E$	Componentes da deformação incremental elástica
$d\varepsilon_{rs}^P$	Componentes da deformação incremental plástica
${}_0^t\varepsilon_x$	Deformação total no tempo t em relação à configuração de referência 0
η	Parâmetro para definir ${}^t\mathbf{B}^S$
${}_0\eta_{ij}$	Deformações incremental não-linear referida à configuração no tempo 0
θ	Direção circunferencial

${}^t\theta_z$	Rotação incremental total em torno do eixo x_3 no tempo t na configuração de referência
${}^t\theta_y$	Rotação incremental total em torno do eixo x_2 no tempo t na configuração de referência
${}^t\kappa_{AS}$	Rigidez de mola por unidade de comprimento da mola axial
${}^t\kappa_{BS}$	Rigidez de mola por unidade de comprimento da mola de base
${}^t\kappa_{US}$	Rigidez de mola por unidade de comprimento da mola superior
${}^t\kappa_{LLS}$	Rigidez de mola por unidade de comprimento da mola lateral esquerda
${}^t\kappa_{RLS}$	Rigidez de mola por unidade de comprimento da mola lateral direita
λ	Constante de Lamé
μ	Constante de Lamé
ν	Coeficiente de Poisson do duto
ν_s	Coeficiente de Poisson do solo
${}^t\sigma_{ij}$	Componentes do tensor desviador de tensões no tempo t
ϕ	Coeficiente de atrito entre o solo e o duto
${}^t\phi_z$	Curvatura incremental total em x_3 no tempo t na configuração de referência
${}_0^t\phi_z^L$	Curvatura linear incremental em x_3
${}_0^t\phi_z^{NL}$	Curvatura não-linear incremental em x_3
${}^t\phi_y$	Curvatura incremental total em x_2 no tempo t na configuração de referência
${}_0^t\phi_y^L$	Curvatura linear incremental em x_2
${}_0^t\phi_y^{NL}$	Curvatura não-linear incremental em x_2
ω	Fator de escala calculado a partir dos autovalores

Gregas Maiúsculas

Δ	Variação
${}^t\Delta_{AS}$	Deformação incremental da mola axial
${}^t\Delta_{BS}$	Deformação de encurtamento incremental da mola de base
${}^t\Delta_{US}$	Deformação de encurtamento incremental da mola superior
${}^t\Delta_{LLS}$	Deformação de encurtamento incremental da mola lateral esquerda
${}^t\Delta_{RLS}$	Deformação de encurtamento incremental da mola lateral direita
${}^t\Phi$	Função do escoamento no tempo t

Matrizes e Vetores

${}^t\boldsymbol{\epsilon}'$	Tensor desviador de deformação no tempo t
${}^t\boldsymbol{\epsilon}^P$	Tensor de deformação plástica no tempo t
$\boldsymbol{\Psi}$	Autovetor do problema de autovalores e autovetores
${}^t\boldsymbol{\Delta}_d$	Vetor de deformações no duto
${}^t\boldsymbol{\Delta}_s$	Vetor das deformações do solo
$\boldsymbol{\Psi}$	Matriz que contém os autovetores de um problema de autovalores e autovetores
$\boldsymbol{\Omega}$	Matriz que contém os autovalores de um problema de autovalores e autovetores
${}_0^t\mathbf{B}^L$	Matriz deformação-deslocamento linear no tempo t
${}_0^t\mathbf{B}_1^{NL}$	Matriz deformação-deslocamento não-linear no tempo t
${}_0^t\mathbf{B}_2^{NL}$	Matriz deformação-deslocamento não-linear no tempo t
${}_0^t\mathbf{B}_3^{NL}$	Matriz deformação-deslocamento não-linear no tempo t
${}_0^t\mathbf{B}^S$	Matriz deformação-deslocamento para as molas de solo no tempo t
\mathbf{C}^E	Matriz de tensão-deformação
${}_0^t\mathbf{D}^P$	Matriz tensão-deformação
${}_0^t\mathbf{D}^S$	Matriz tensão-deformação para as molas de representação do solo
${}^t\mathbf{F}$	Vetor das forças nos pontos nodais que correspondem às tensões do elemento no tempo t
${}_0^t\mathbf{F}$	Matriz de força interna axial no tempo t
${}^t\mathbf{F}_{int}$	Vetor de forças internas equivalentes no tempo t
\mathbf{F}_{KS}	Vetor de forças incrementais das molas de representação do solo
${}_0^t\mathbf{H}$	Matriz das funções de interpolação no tempo t
\mathbf{K}	Matriz de rigidez global
${}_0^t\mathbf{K}$	Matriz de rigidez global da estrutura no tempo t
${}_0^t\mathbf{K}_{EP}^e$	Matriz de rigidez elásto-plástica elementar no tempo t
${}_0^t\mathbf{K}_G^e$	Matriz de rigidez geométrica (não-linear) elementar no tempo t
${}_0^t\mathbf{K}_S^e$	Matriz de rigidez das molas de representação do solo elementar no tempo t
${}^t\mathbf{K}^e$	Matriz de rigidez elementar no tempo t
${}_0^t\mathbf{M}_1$	Matriz de momento equivalente em relação a x_3 no tempo t
${}_0^t\mathbf{M}_2$	Matriz de momento equivalente em relação a x_2 no tempo t

${}^t\mathbf{P}^e$	Vetor de forças externas no tempo t
${}_0^t\mathbf{Q}_P^e$	Vetor de força equivalente nos pontos nodais do elemento para o duto no tempo t
${}_0^t\mathbf{Q}_S^e$	Vetor de força equivalente nos pontos nodais do elemento para as molas de representação do solo no tempo t
$\Delta\mathbf{R}^{(i)}$	Vetor de forças externas desbalanceado incremental na iteração i
${}^t\mathbf{R}$	Vetor de forças externas aplicadas nos pontos nodais no tempo t
${}_0^t\mathbf{R}$	Vetor de carga global da estrutura no tempo t
${}^t\mathbf{R}^e$	Vetor de força elementar no tempo t
\mathbf{R}_T	Matriz de rotação
${}^t\mathbf{ROT}$	Matriz componente da matriz de rotação no tempo t
${}^t\mathbf{S}$	Tensor desviador de tensões no tempo t
${}^t\mathbf{u}$	Vetor de deslocamentos no tempo t
${}_0^t\mathbf{u}$	Vetor de deslocamentos da estrutura
\mathbf{u}_e	Vetor dos deslocamentos nodais do elemento no sistema de coordenadas locais
$\tilde{\mathbf{u}}_e$	Vetor dos deslocamentos nodais do elemento no sistema de coordenadas globais
\mathbf{U}	Vetor de deslocamento global
$\Delta\mathbf{U}^{(i)}$	Vetor de deslocamentos nodais incremental na iteração i

Outros Símbolos

${}^{t+\Delta t}\mathfrak{R}$	Trabalho virtual externo
\in_D	Tolerância de convergência baseada no vetor de deslocamentos
\in_F	Tolerância de convergência baseada no vetor de carga desbalanceado
\in_E	Tolerância de convergência baseado na energia interna do sistema

RESUMO

Tubulações estão sendo amplamente empregadas mundialmente como meios de transporte de petróleo e de seus derivados. Muitos desastres ambientais têm ocorrido relacionados a dutos devido à susceptibilidade destes ao ambiente local e à esforços mecânicos não previstos em projeto. Para evitar estas situações indesejáveis, modelos computacionais estão realizando um importante papel devido à possibilidade de prever o comportamento dos dutos dos mais variados modos. Este trabalho apresenta uma formulação de elemento finito tanto para análise linear quanto para análise não-linear física e geométrica de dutos. Esta formulação é aplicada à estimativa da carga crítica de flambagem de dutos enterrados ou não. As cargas críticas de flambagem são estimadas através de um método não-linear incremental e através de um cálculo linearizado de flambagem. Os resultados obtidos nas simulações numéricas são comparados com os encontrados na literatura ou que provém de solução analítica, como a Carga Crítica de Euler para Flambagem e o Método de Hobbs.

Palavras-chave: Tubulações, Dutos, Método dos Elementos Finitos, Flambagem, Análise Não-Linear Incremental, Cálculo Linearizado de Flambagem, Método de Hobbs.

ABSTRACT

Pipelines are being widely employed worldwide as means of conveyance of crude oil and its derivatives. Many environmental disasters have been happening related to pipelines due to unpredicted mechanical loads in the engineering design and due to its susceptibleness to the surrounding environment. To avoid these undesirable situations, computational models are playing an important role as they are able to predict the behaviour of pipelines in many ways. This work presents a finite element formulation for both material and kinematic (geometric) nonlinear analysis of pipelines. This formulation is employed to estimate the critical buckling load of either buried or not buried pipelines. The critical loads are estimated through a nonlinear incremental method and by linearized buckling analysis. The results achieved with the numerical simulations are compared with the ones that have been found in the literature or are compared with the ones that came from analytical solutions such as the Euler's Formula for the critical buckling load and the Hobbs's Method.

Keywords: Pipelines, Finite Element Method, Buckling, Nonlinear Incremental Analysis, Linearized Buckling Analysis, Hobbs's Method.

1 INTRODUÇÃO

Dutos como meio de transporte de petróleo e de seus derivados vêm sendo amplamente empregados mundialmente. Esses devem percorrer os mais variados terrenos como, por exemplo, águas profundas, desertos, morros, regiões de colúvio, e até o pólo ártico. O fato de estarem em contato direto com o terreno faz com que os dutos sejam susceptíveis às condições impostas por este.

No Brasil os dutos para transporte de petróleo e de seus derivados encontram-se basicamente em duas situações críticas: apoiados sobre o leito marinho e enterrados em regiões de colúvio. Geralmente, acidentes nestas regiões causam grandes desastres ambientais e econômicos, motivos pelos quais um grande número de pesquisas sobre dutos têm sido realizadas.

FIGURA 1.1 – DUTO DEFORMADO APÓS FLAMBAGEM

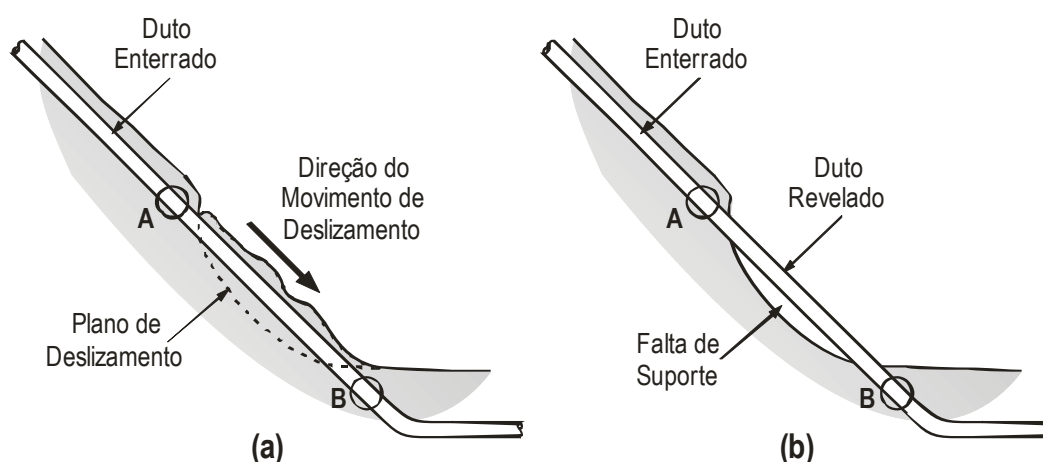


Fonte: Da Costa et al. (2002).

No caso de dutos apoiados sobre o leito marinho a principal causa de ruptura da tubulação é a ocorrência do fenômeno de flambagem, geralmente causado pela alta temperatura do óleo transportado, conforme apresentado pela Figura 1.1. Já em dutos enterrados em regiões de morros, deslizamentos de terra em encostas que podem alterar a configuração original do duto, onde este fica sujeito a esforços de flexão não previstos, são as causas mais frequentes de ruptura da tubulação.

A ocorrência do fenômeno de flambagem, apesar de menos comum do que em dutos apoiados sobre o leito marinho, também pode ocorrer em dutos enterrados em encostas quando o movimento do talude ocorrer no sentido longitudinal do duto ou quando, após a ocorrência de um deslizamento de terra, a estrutura continuar intacta, porém sem a restrição imposta pelo solo, conforme ilustrado pela Figura 1.2.

FIGURA 1.2 – TUBULAÇÃO SUJEITA A DESLIZAMENTOS DE TERRA



Assim, com base no exposto anteriormente, este trabalho objetiva a determinação da carga crítica de flambagem de dutos através da implementação do elemento finito unidimensional apresentado por Zhou e Murray (1996), aperfeiçoado por Souza (2005). Este elemento foi escolhido por representar bem os modos de flexão, embora não considere nem a torção nem a ovalização da seção transversal do duto. O efeito de torção, apesar de ser relativamente fácil sua inclusão no modelo, foi desconsiderado por ser um fenômeno raro em dutos de transporte de fluídos. Já a ovalização da seção transversal não é um fenômeno relevante para o modelo porque as deformações que

ocorrem na seção transversal, no caso de dutos para transporte de petróleo e seus derivados, são desprezíveis.

Para simular o confinamento com o solo são utilizados elementos de mola. Os resultados obtidos com a análise por elementos finitos são comparados com os disponíveis na literatura e com os obtidos através da aplicação de métodos analíticos.

Conforme mencionado anteriormente, várias pesquisas, tendo dutos como foco principal, têm sido realizadas. Uma breve revisão da literatura é apresentada no Capítulo 2 com o intuito de levantar os assuntos mais relevantes em pesquisa. A formulação do elemento finito utilizado é apresentada no Capítulo 3.

A flambagem é abordada no Capítulo 4, onde são apresentadas as formulações dos métodos analíticos de Euler, para vigas, e de Hobbs, para dutos, para obtenção das cargas críticas de flambagem. Apresentam-se, ainda, técnicas numéricas para obtenção destas cargas.

O Capítulo 5 traz quatro simulações numéricas, as quais foram utilizadas para validar a implementação do elemento finito empregado. Por fim, no Capítulo 6 discutem-se e analisam-se os resultados obtidos com a implementação do elemento finito empregado. Este último capítulo traz ainda propostas para trabalhos futuros.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Uma tubulação está sujeita aos mais variados tipos de carregamentos que podem ser tanto internos quanto externos. Os principais tipos são: peso do solo, para dutos enterrados; pressão interna; variação da temperatura; e pressão externa de água, para dutos submarinos. Além disso, fadiga e defeitos na superfície de um duto (como, por exemplo, a corrosão) comprometem sua resistência e dutos sobrecarregados são forçados a trabalharem em modo plástico. Esses são os principais motivos das várias pesquisas sobre dutos que estão sendo realizadas. Alguns dos principais assuntos em pesquisa são discutidos nas seções a seguir.

2.1 COMPORTAMENTO E VIDA ÚTIL DE DUTOS

Nowzartash e Mohareb (2004) apresentaram um elemento finito unidimensional de dois nós para modelagem do comportamento inelástico de sistemas tridimensionais de dutos. De forma análoga, Mejía (2003), Souza (2005) e Machado (2006) apresentaram uma formulação de elemento finito para análises geometricamente não-lineares de dutos. Porém, diferentemente da formulação dos dois primeiros autores, a formulação apresentada por Machado (2006) não considera a interação solo-estrutura.

Uma análise de elementos finitos foi realizada por Lázaro (2004) simulando a interação entre dutos e o solo circundante para tubulações, em encostas, sujeitas a deslizamentos de terra.

Dvorkin e Toscano (2003) simularam, através de modelos de elementos finitos, o desempenho de produtos tubulares de aço utilizados na indústria de petróleo. Neste trabalho os autores focaram na análise de conexões de rosca de peças tubulares para transporte de óleo e na análise da pressão de colapso de dutos. Diniz (2002) comparou os resultados de ruptura obtidos em laboratório para nove amostras de tubos de aço API 5L X60 com análises numéricas lineares e não-lineares.

Dois problemas de pressão em dutos foram apresentados por Şanal (2000). Este simulou os grandes deslocamentos e a resposta plástica de deformação de uma estrutura através de análises, tanto não-linear geométrica quanto não-linear material, de elementos finitos. Já Lotsberg (2008), baseado na teoria clássica de cascas, apresentou expressões analíticas para a obtenção dos fatores de concentração de tensões em dutos sujeitos a pressão interna e a forças axiais.

Aplicando uma análise elásto-plástica de elementos finitos, Robertson et al. (2005) investigaram o colapso plástico de dutos fletidos anexados a dutos retos sob o efeito combinado de pressão interna e de momento fletor.

De acordo com Østby et al. (2005) e Jayadevan et al. (2004), os métodos existentes para avaliação da fratura de dutos são baseados em métodos analíticos simplificados. Este fato, segundo estes autores, faz com que a aplicação destes métodos em superfícies de dutos fissurados com grandes deformações não seja confiável. Os estudos desses autores objetivaram o entendimento e a identificação de vários parâmetros que influenciam a resposta à fratura dos dutos com fissuras sob condições mais reais de carregamento.

Zhu e Leis (2004) investigaram analiticamente a pressão de colapso de dutos tanto com, quanto sem, defeitos de corrosão, mirando as condições sob as quais os critérios de resistência são apropriados para a previsão da pressão de colapso. Já a variação de temperatura foi estudada por Fonseca et al. (2005) que apresentaram um algoritmo de elementos finitos desenvolvido para realizar análises térmicas e mecânicas de aços estruturais de sistemas de dutos sujeitos às altas temperaturas. Juntando os dois assuntos, Pavlou et al. (2006) desenvolveram um novo conceito para prever o comportamento mecânico de dutos sob pressão interna combinada à alta temperatura.

Como uma alternativa ao aço, vários tipos de materiais estão sendo considerados na produção de dutos, como o titânio e polímeros reforçados com fibras. Bjørset et al. (2003) discutiram o uso de uma aproximação numérica suplementar, baseada no método dos elementos finitos, de fórmulas para a capacidade do aço tanto para flambagem local quanto para colapso, uma vez que a aplicação direta dessas fórmulas em dutos de titânio é um tanto incerta. Guimarães (2006) propôs a formulação de um mo-

delo de elemento finito axissimétrico para testar o comportamento de um tubo laminado por camadas de materiais compósitos fibrosos, enquanto que Baranger et al. (2009) determinaram a influência de defeitos de fabricação em tubos de materiais compósitos analisando apenas suas extremidades de forma mais precisa.

Além da avaliação e da previsão de estruturas intactas carregadas, também é importante medir o carregamento limite para estruturas defeituosas devido à concentração de tensão que pode ocorrer na área defeituosa. Seguindo essa linha de pesquisa, Chen et al. (1998) apresentaram um método de solução numérica para o carregamento radial enquanto Benjamin e Andrade (2003) propuseram um método para prever a pressão de colapso tanto para defeitos de corrosão curtos como longos.

A resistência de estruturas defeituosas foi avaliada por Ahammed (1997) e por Pluvinage (2006). O primeiro desenvolveu um modelo determinístico para avaliar a resistência disponível de um duto de aço corroído pelo tempo enquanto o segundo analisou a resistência através de três métodos: análise limite, diagrama de avaliação de colapso e crescimento de trinca subcrítica.

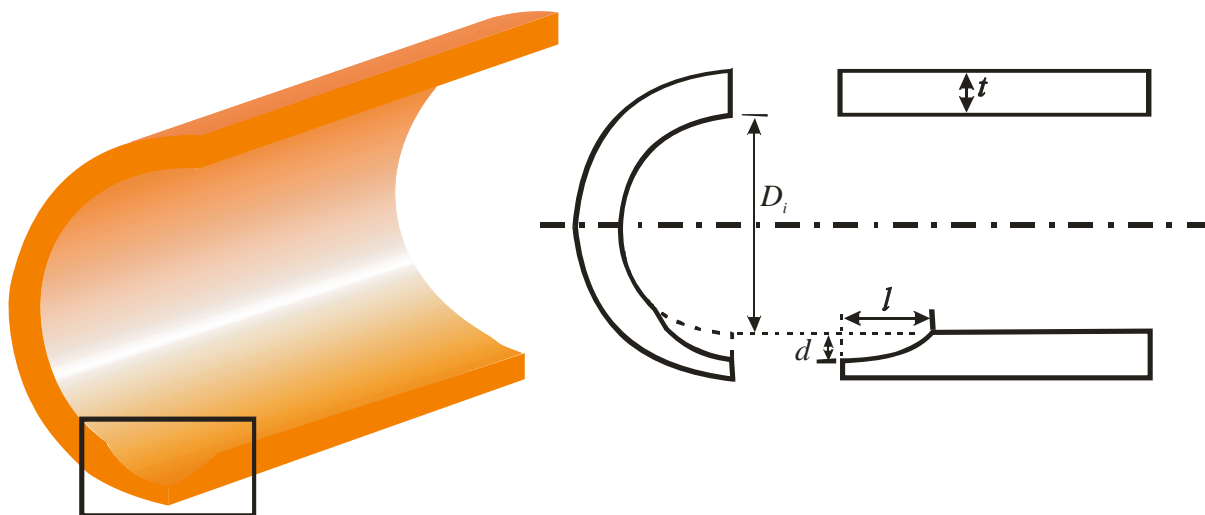
A corrosão é conhecida como um dos principais fatores que causam o colapso em dutos. Por isso, muitos autores trataram deste assunto em seus trabalhos. Benjamin e Andrade (2003), por exemplo, propuseram uma versão modificada do método RSTRENG 085dL para prever a pressão de colapso de dutos corroídos, enquanto que Černý e Linhart (2004) estudaram a tensão de fissura na parte corroída de dois tipos de dutos de aço.

Choi et al. (2003) propuseram um tipo de solução por carga limite, conhecido como *fitness-for-purpose* (FFP), para gasodutos de aço, corroídos, e conduziram simulações em elementos finitos para derivar um critério de colapso apropriado para obter a solução limite FFP para gasodutos corroídos como uma função da profundidade e comprimento do defeito e da geometria do gasoduto.

Um método muito difundido nas análises de elementos finitos para modelagem da corrosão é o estreitamento local da parede (ver Figura 2.1), o qual permite criar uma concentração de tensão em uma área local. Esta técnica foi empregada por Kim e Son (2004) e os valores resultantes dos fatores de concentração de tensão foram ta-

bulados para uso prático e os efeitos de parâmetros relevantes, como as geometrias dos dutos e dos defeitos, nos fatores de concentração de tensão foram discutidos.

FIGURA 2.1 – TÉCNICA DE ESTREITAMENTO LOCAL DA PAREDE DO DUTO



Fonte: Adaptado de Kim e Son (2004).

Guimarães (2005) e Valentini (2006) realizaram análises numéricas de dutos corroídos, empregando a técnica de estreitamento local para simular a corrosão, com o objetivo de comparar os resultados obtidos com os encontrados em ensaios experimentais ou com métodos analíticos semi-empíricos.

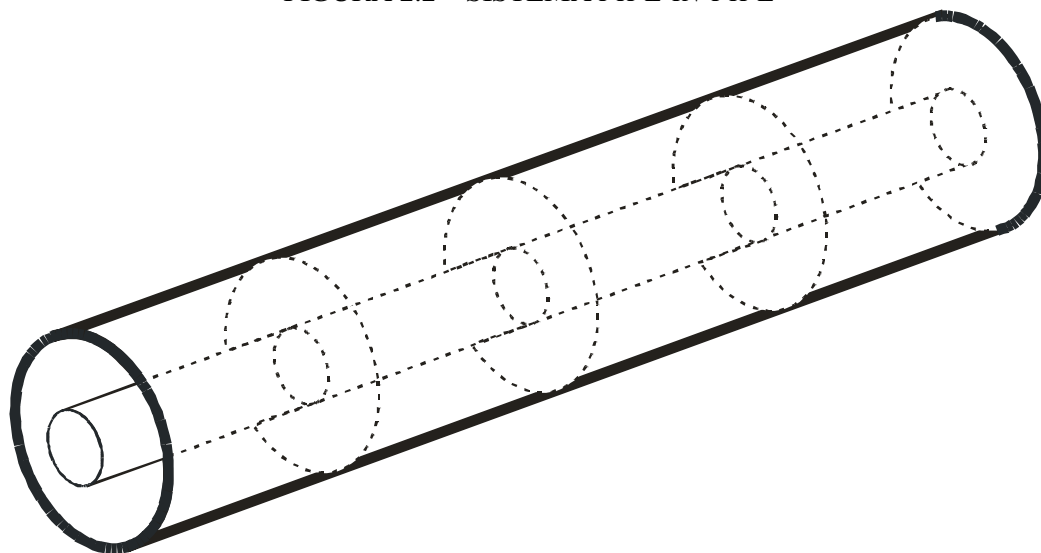
Ahn et al. (2006) também utilizaram a técnica de estreitamento local de parede. Neste estudo, os autores compararam amostras em escala real de dutos de aço-carbono com análises elásto-plásticas utilizando elementos finitos.

2.2 DUTOS SUJEITOS À FLAMBAGEM

Por ser um fenômeno muito comum em dutos aquecidos, principalmente em dutos submarinos, a flambagem tem sido amplamente estudada e vários trabalhos sobre este fenômeno têm sido publicados empregando as mais variadas técnicas de análise. Alguns destes trabalhos são apresentados a seguir.

Sistemas *double-piping*, também conhecidos como sistemas *pipe-in-pipe* (ver Figura 2.2), foram estudados por Vaz e Patel (1999) e por Zaras (2008). O trabalho de Vaz e Patel apresentou uma formulação analítica para a avaliação da instabilidade de flambagem conjunta de sistemas *pipe-in-pipe*, a qual é tipicamente considerada para produtos de alta temperatura na indústria de gás e óleo. O trabalho de Zaras apresentou alguns resultados de uma extensa investigação para avaliação do estado de falha de sistemas *pipe-in-pipe* pressurizados. Esta investigação incluiu uma pesquisa em dutos em que ocorreram falhas, comparando o projeto e o meio de produção com as mais variadas normas. Análises teóricas empregando os resultados dos trabalhos foram conduzidas para análise da propagação da flambagem.

FIGURA 2.2 – SISTEMA PIPE-IN-PIPE



Fonte: Vaz e Patel (1999).

O sistema de sensores de Brillouin utiliza feixes de laser que são captados por sensores ao longo do duto. Estes sensores captam diferenças de frequência nos feixes de laser, utilizando-as para medir as deformações ao longo do duto. Este sistema tem sido empregado tanto para monitoramento quando para previsão de flambagem em dutos e colunas. Ravet et al. (2006) conduziram um experimento de caracterização da deformação para monitorar a flambagem de dutos e colunas utilizando um sistema de sensores de Brillouin. Pela utilização o fator de ampliação da largura do espectro de

Brillouin, Zhang et al. (2008) puderam prever o local e a sequência de progressão dos padrões de flambagem antes da detecção visual em laboratório.

O trabalho de Cardoso (2005) utilizou o método dos elementos finitos para avaliar o comportamento estrutural de dutos submarinos aquecidos. Foram consideradas tanto as não-linearidades físicas quanto geométricas envolvidas durante o processo de flambagem termomecânica. Neste trabalho, ainda são avaliados os estados limites de flambagem local e de fadiga devido aos ciclos de aquecimento/pressurização e desaquecimento/despressurização em dutos submarinos apoiados sobre pisos argilosos. Já Massa (2003) estudou o fenômeno de flambagem vertical em dutos rígidos submarinos, enterrados ou semi-enterrados, transportando fluidos aquecidos.

Zhou e Murray (1995) apresentaram um método para incorporar o comportamento de flambagem local de dutos através de uma análise de casca 3D elásto-plástica com grandes deformações em um modelo de viga, para dutos, considerando a interação solo-estrutura. Além disso, estes autores descreveram um método para extração das propriedades de rigidez de um duto a partir da análise de flambagem de várias combinações de carregamento e, mais, uma técnica para determinação dos coeficientes de rigidez a partir das propriedades descritas.

Também baseado na teoria de cascas Pasqualino e Estefen (2001) apresentaram uma formulação para simulação numérica da propagação de flambagem em dutos submarinos de águas profundas. Essa formulação foi baseada na teoria de cascas finas incorporando grandes rotações e comportamento elásto-plástico do material para deformações infinitesimais. Os resultados obtidos foram correlacionados com os resultados experimentais de testes laboratoriais em modelos de pequena escala.

Murray (1997) trabalhou na previsão do comportamento de tubulações enterradas quando estas podem ser consideradas como estruturas de casca sujeitas às curvaturas que excedam os pontos limites. O trabalho de pesquisa deste autor considerou o desenvolvimento de flambagem local, deformações localizadas e enrugamentos os quais caracterizam o comportamento de estruturas de duto, e, além disso, a relação entre esses fenômenos. Os resultados das análises de elementos finitos foram comparados com duas séries de testes em dutos industriais em escala real.

No trabalho realizado por Fatt e Xue (2001), soluções rígido-plásticas foram derivadas para a pressão constante, quase-estática, de propagação de flambagem em dutos corroídos. Essas soluções foram comparadas com previsões obtidas com a utilização do método dos elementos finitos. Para modelar a corrosão foi utilizado o método do estreitamento local de parede. Paquette e Kyriakides (2006) investigaram, através da combinação de experimentos e análises, a flambagem plástica e o colapso de cilindros longos sob pressão interna combinada à compressão axial.

Em artigos clássicos, Hobbs (1981, 1984) apresentou um método analítico, baseado nos estudos de Kerr (1978), para obtenção das cargas de flambagem e da configuração pós-flambagem de dutos. As formulações apresentadas por este autor abrangem tanto a flambagem lateral quanto a flambagem vertical dos dutos. Um novo trabalho foi apresentado por Benjamin e Andrade (2001) com a finalidade de melhorar o desempenho do método de Hobbs, aproximando-o ainda mais da realidade. Tanto o método de Hobbs (1981, 1984) quanto a versão modificada apresentada por Benjamin e Andrade (2001), são apresentados em maiores detalhes no Capítulo 5, que trata sobre a teoria de flambagem.

Já Maltby e Caladine (1995a, 1995b) apresentaram um estudo experimental de alguns aspectos da flambagem vertical de dutos enterrados por meio de modelos em pequena escala. Além disso, várias teorias de flambagem vertical, nas quais a fundação é modelada como base rígida, foram revistas.

Ju e Kyriakides (1988) analisaram analiticamente a flambagem vertical de dutos submarinos através de uma formulação de viga longa sobre uma fundação rígida. Este estudo focou o efeito de imperfeições geométricas iniciais pequenas na resposta e na estabilidade da estrutura.

Karamanos (2002) examinou a instabilidade de tubos elásticos finos e longos, tanto inicialmente retos quanto inicialmente fletidos, utilizando uma técnica não-linear de elementos finitos à resposta do tubo combinando ovalização e flambagem. A técnica adotada emprega funções polinomiais na direção longitudinal do duto e funções trigonométricas para descrever a deformação da seção transversal. Watashi e Iwata

(1995) também analisaram a flambagem e a ovalização de dutos utilizando o método dos elementos finitos.

Da Costa et al. (2002) apresentaram os resultados de uma análise realizada após a ruptura, ocorrida devido à flambagem, de um oleoduto na Baía da Guanabara, Rio de Janeiro, Brasil. O procedimento adotado para a modelagem computacional foi muito sofisticado para poder simular adequadamente interação entre o solo e a estrutura do duto. Nessa modelagem foi adotado o método dos elementos finitos considerando a não-linearidade material tanto do solo quanto do duto e, ainda, considerou-se o comportamento não-linear do duto.

3 ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO DE TRÊS NÓS

Este capítulo apresenta a formulação do elemento finito isoparamétrico de viga não-linear geométrico, com três nós e com seção transversal circular, adotado no presente trabalho.

A formulação deste elemento foi originalmente desenvolvida por Zhou e Murray (1996), sendo posteriormente utilizada por Mejía (2003) e aperfeiçoada por Souza (2005). No presente trabalho, esta formulação foi estendida para a análise de flambagem.

3.1 HIPÓTESES CINEMÁTICAS FUNDAMENTAIS

A descrição cinemática do elemento finito está baseada na Formulação Lagrangeana Total e inclui os efeitos não-lineares devidos à possibilidade do desenvolvimento de grandes deslocamentos, grandes rotações e pequenas deformações (não-linearidade geométrica). A não-linearidade física também foi incorporada ao elemento finito assumindo que o material do duto e o solo possuam comportamento elástico-plástico e elástico idealmente plástico, respectivamente.

A formulação do elemento finito considera a hipótese de Bernoulli e emprega a técnica denominada Módulo Reduzido de Integração Direta (RMDI, na sigla em inglês). Esta técnica foi aplicada na integração do elemento finito para resolver problemas da interação solo-duto. Segundo Zhou e Murray (1996), a técnica RMDI não considera a influência da flambagem local e o enrugamento da seção transversal no comportamento do duto.

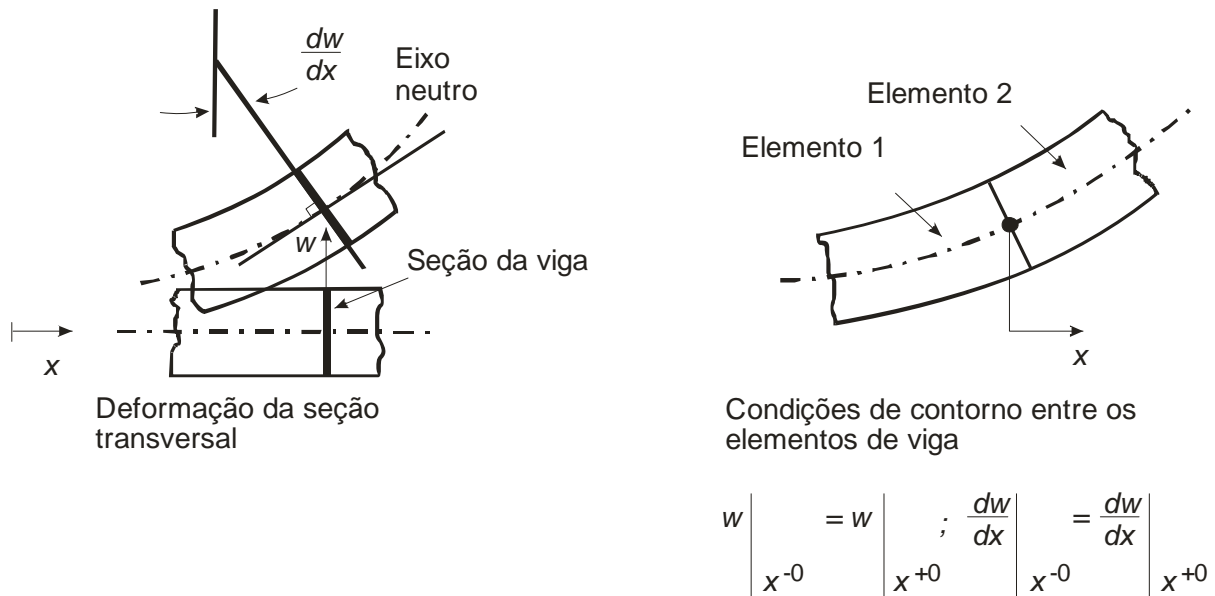
Na técnica RMDI a tensão longitudinal é determinada através da lei constitutiva do material usando incrementos de deformação calculados na seção transversal plana do duto. Os incrementos de tensão na direção longitudinal são determinados nos pontos de integração ao longo da circunferência da seção transversal do duto de maneira consistente com o estado de tensão biaxial, com o critério de carregamento e

descarregamento das equações constitutivas, com os níveis correntes de deformações plásticas e com valores de tensão efetiva e deformações plásticas efetivas que estão associados em cada ponto de integração (ZHOU e MURRAY, 1996).

No desenvolvimento do modelo matemático foram consideradas as seguintes hipóteses fundamentais:

- Hipótese de viga de Bernoulli: Consiste na análise da flexão de viga, excluindo deformações de cisalhamento. Esta hipótese considera que a normal à superfície média (eixo neutro) da viga permanece reta durante a deformação e que a rotação angular é igual à curvatura da superfície média da mesma, conforme apresentado pela Figura 3.1. Segundo Zhou e Murray (1996), esta hipótese é justificável devido à distorção da seção transversal e o empenamento resultarem principalmente da flambagem local, a qual é desconsiderada pela técnica RMDI;

FIGURA 3.1 – DEFORMAÇÕES DE VIGA EXCLUINDO O EFEITO DO CISALHAMENTO



Fonte: Bathe (1982).

- Tensões radiais e tangenciais: apenas em um duto carregado com uma pressão interna ocorrem tensões radiais e tangenciais. De acordo com a solução de Lamé para cilindros de paredes finas a tensão máxima é a tangencial

(MOSER, 2001). Assim sendo, na presente formulação, a tensão radial é desprezada devido ao seu pequeno valor quando comparada com as tensões tangencial e longitudinal;

- Critério de escoamento de Von Mises: assume-se um comportamento elástico-plástico para o material do duto, onde o escoamento se dá segundo o critério de Von Mises com endurecimento isotrópico;
- Fundação do tipo *Winkler*: modelo que consiste em molas de representação do solo. Estas molas são consideradas elásticas idealmente plásticas discretas conectadas, tanto longitudinalmente quanto transversalmente, às paredes do duto ao longo do seu eixo.

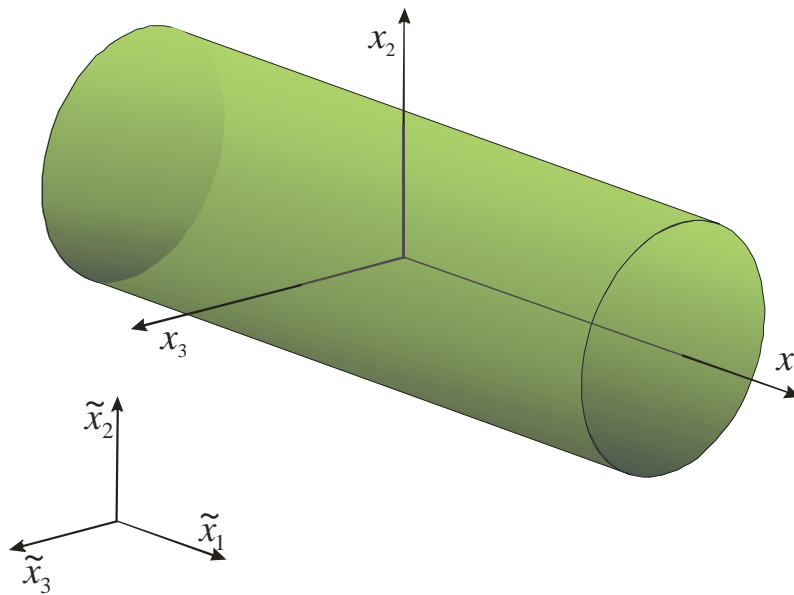
O modelo adotado considera que o solo circundante ao duto pode ser dividido em partes e que a reação de cada uma destas partes pode ser representada por molas de solo. Porém, conforme lembrado por Mejía (2003) e Souza (2005), a interação entre as partes é negligenciada, algo que não ocorre na realidade.

3.2 SISTEMAS DE REFERÊNCIA E FORMULAÇÃO LAGRANGEANA TOTAL INCREMENTAL

O movimento de um corpo tridimensional é considerado em um sistema de coordenadas fixas (x_1 , x_2 e x_3). Na formulação do elemento finito foram definidos os sistemas de coordenadas global e local (Fig. 3.2). O eixo x_1 do sistema local de coordenadas passa através do eixo central da seção transversal enquanto os eixos x_2 e x_3 definem os planos de flexão (ZHOU e MURRAY, 1996).

Os deslocamentos u , v e w estão relacionados às direções x_1 , x_2 e x_3 , respectivamente, do sistema de coordenadas locais. As direções do sistema global são denotadas por \tilde{x}_1 , \tilde{x}_2 e \tilde{x}_3 , e toda e qualquer quantidade definida neste sistema é denotada por um til sobreposto à letra.

FIGURA 3.2 – SISTEMAS DE COORDENADAS GLOBAL E LOCAL



Fonte: Adaptado de Souza (2005).

Em uma análise não-linear, o equilíbrio do corpo considerado deve ser estabelecido na configuração atual. Geralmente faz-se necessário o emprego de uma formulação incremental para descrever o carregamento e o movimento do corpo.

Segundo Bathe (1996), assumem-se como conhecidas as soluções para as variáveis estáticas e cinemáticas para todo passo de tempo, variando do tempo 0 ao tempo t . Assim, o processo de solução para a próxima posição de equilíbrio requerida, corresponde ao tempo $t + \Delta t$, é previsível e é aplicada repetidamente até que a solução completa seja obtida. Deste modo, adota-se uma formulação Lagrangeana (ou material) do problema, ou seja, todas as partículas do corpo em seu movimento são acompanhadas da configuração original do corpo para a final. Esta aproximação contrasta com a formulação Euleriana a qual é usualmente utilizada na análise de problemas da mecânica dos fluidos, onde foca-se o movimento do material através do volume de controle estacionário.

Para uma análise não-linear é possível a adoção de duas formas de referenciais Lagrangeanos: referencial Lagrangeano Total e referencial Lagrangeano Atualizado (BATHE, 1996). As peculiaridades destes dois referenciais são:

- Referencial Lagrangeano Total: os deslocamentos são medidos em relação à configuração inicial não deformada;
- Referencial Lagrangeano Atualizado: os deslocamentos são medidos em relação à última configuração de equilíbrio obtida no processo incremental, ou seja, em relação a um referencial que é atualizado a cada incremento de carga.

No desenvolvimento da formulação aqui presente, a notação empregada com relação aos índices se dá da seguinte maneira:

- Índice superior esquerdo: denota a configuração corrente da variável;
- Índice inferior esquerdo: denota a configuração de referência na qual ocorre a variável;
- Índice inferior direito: denota as componentes do vetor ou do tensor de segunda ordem;
- Índice inferior direito seguido de vírgula: denota em relação a qual variável ocorre a diferenciação.

Bathe (1996) refere-se à formulação Lagrangeana Total apenas como formulação Lagrangeana. Neste sistema referencial todas as variáveis estáticas e cinemáticas são referidas com a configuração inicial no tempo 0.

A Equação (3.1) fornece a equação básica do movimento com base na formulação Lagrangeana.

$$\int_{^0V} {}^{t+\Delta t}S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}{}^0\epsilon_{ij} d^0V = {}^{t+\Delta t}\mathfrak{R} \quad (3.1)$$

Sendo:

0V – volume do corpo sob consideração;

${}^{t+\Delta t}_0 S_{ij}$ – segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff no tempo $t + \Delta t$ referido a configuração no tempo 0;

${}^{t+\Delta t}_0 \mathcal{E}_{ij}$ – tensor de deformações de Green-Lagrange no tempo $t + \Delta t$ referido a configuração no tempo 0;

${}^{t+\Delta t} \mathfrak{R}$ – trabalho virtual externo.

A equação do movimento linearizada na formulação Lagrangeana é dada pela Equação (3.2).

$$\int_{0_V} {}_0 C_{ijrs} {}_0 e_{rs} \delta {}_0 e_{ij} d^0 V + \int_{0_V} {}^t S_{ij} \delta {}_0 \eta_{ij} d^0 V = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} - \int_{0_V} {}^t S_{ij} \delta {}_0 e_{ij} d^0 V \quad (3.2)$$

Sendo:

${}_0 C_{ijrs}$ – tensor de tensão-deformação incremental no tempo t referido à configuração no tempo 0;

${}^t S_{ij}$ – segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff no tempo t referido à configuração no tempo 0;

${}_0 e_{ij}$ – deformações incremental linear referida à configuração no tempo 0;

${}_0 \eta_{ij}$ – deformações incremental não-linear referida à configuração no tempo 0;

Em uma análise não-linear com grandes deslocamentos, a configuração do corpo altera-se continuamente, portanto, as tensões e deformações devem ser avaliadas independentemente do conhecimento prévio da configuração no tempo $t + \Delta t$. Segundo Bathe (1996), essa condição é satisfeita com o emprego do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff e do seu conjugado, o tensor de deformações de Green-Lagrange.

De acordo com Bathe (1996), o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff é invariável à ocorrência de grandes deslocamentos e grandes rotações do material. Isto posto, o seu emprego permite utilizar qualquer configuração do corpo conhecida, viabilizando o desenvolvimento da análise uma vez que a configuração no tempo $t + \Delta t$ não é conhecida.

3.3 RELAÇÃO DEFORMAÇÃO – DESLOCAMENTO

Conforme apresentado por Souza (2005), os deslocamentos do eixo centroidal são obtidos a partir dos deslocamentos incrementais, representados matematicamente pelas equações abaixo.

$${}^{t+\Delta t}u_0 = {}^t u_0 + {}_t u_0 \quad (3.3)$$

$${}^{t+\Delta t}v_0 = {}^t v_0 + {}_t v_0 \quad (3.4)$$

$${}^{t+\Delta t}w_0 = {}^t w_0 + {}_t w_0 \quad (3.5)$$

As componentes de deslocamentos ${}_t u$, ${}_t v$ e ${}_t w$ no tempo de referência t de qualquer ponto X (x_1 , x_2 e x_3) na seção transversal, podem ser expressas de acordo com as Equações (3.6) a (3.8). Nestas equações, ${}_t u_0$, ${}_t v_0$ e ${}_t w_0$ são os deslocamentos do eixo centroidal no tempo de referência t .

$${}_t u = {}_t u_0 - \frac{\partial {}_t v_0}{\partial {}^t x_1} x_2 + \frac{\partial {}_t w_0}{\partial {}^t x_1} x_3 \quad (3.6)$$

$${}_t v = {}_t v_0 \quad (3.7)$$

$${}_t w = {}_t w_0 \quad (3.8)$$

Os deslocamentos totais acumulados nos sistemas de coordenadas locais são apresentados pelas Equações (3.9) a (3.11)

$${}^{t+\Delta t}u = {}^t u + {}_t u \quad (3.9)$$

$${}^{t+\Delta t}v = {}^t v + {}_t v \quad (3.10)$$

$${}^{t+\Delta t}w = {}^t w + {}_t w \quad (3.11)$$

De acordo com Bathe (1982), segundo uma descrição cinemática com base na formulação Lagrangeana, o tensor de deformação conjugado ao segundo tensor de ten-

são de Piola-Kirchhoff é o tensor de deformação de Green-Lagrange, o qual é definido pela Equação (3.12).

$${}^t\epsilon_{i,j} = \frac{1}{2} \left({}^t_0u_{i,j} + {}^t_0u_{j,i} + {}^t_0u_{k,i} {}^t_0u_{k,j} \right) \quad (3.12)$$

Onde

$${}^t_0u_{1,1} = \frac{\partial^t u}{\partial^0 x_1}, \quad {}^t_0u_{2,1} = \frac{\partial^t v}{\partial^0 x_1} \text{ e } {}^t_0u_{3,1} = \frac{\partial^t w}{\partial^0 x_1} \quad (3.13a)$$

$${}^t_0u_{1,2} = \frac{\partial^t u}{\partial^0 x_2}, \quad {}^t_0u_{2,2} = \frac{\partial^t v}{\partial^0 x_2} \text{ e } {}^t_0u_{3,2} = \frac{\partial^t w}{\partial^0 x_2} \quad (3.13b)$$

$${}^t_0u_{1,3} = \frac{\partial^t u}{\partial^0 x_3}, \quad {}^t_0u_{2,3} = \frac{\partial^t v}{\partial^0 x_3} \text{ e } {}^t_0u_{3,3} = \frac{\partial^t w}{\partial^0 x_3} \quad (3.13c)$$

Utilizando-se a notação para subscritos de acordo com a convenção $i, j = 1, 2, 3$, a deformação incremental axial na direção x_1 é dada pela Equação (3.14).

$$\begin{aligned} {}^t\epsilon_{1,1} = {}^t\epsilon_{x_1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^t u}{\partial^0 x_1} \frac{\partial^t u}{\partial^0 x_1} + \frac{\partial^t u}{\partial^0 x_1} \frac{\partial^t u}{\partial^0 x_1} + \frac{\partial^t v}{\partial^0 x_1} \frac{\partial^t v}{\partial^0 x_1} + \frac{\partial^t v}{\partial^0 x_1} \frac{\partial^t v}{\partial^0 x_1} + \frac{\partial^t w}{\partial^0 x_1} \frac{\partial^t w}{\partial^0 x_1} + \frac{\partial^t w}{\partial^0 x_1} \frac{\partial^t w}{\partial^0 x_1} \right) = \\ &= \frac{\partial^t u}{\partial^0 x_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^t u}{\partial^0 x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial^t v}{\partial^0 x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial^t w}{\partial^0 x_1} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Com a substituição das Equações (3.6), (3.7) e (3.8) na Equação (3.14), a componente de deformação longitudinal pode ser expressa em termos de componentes do eixo centroidal, conforme apresentado pelas Equações (3.15) e (3.16).

$$\begin{aligned}
{}_t\boldsymbol{\varepsilon}_{x_1} &= \frac{\partial_t u_0}{\partial^t x_1} - x_2 \frac{\partial^2 {}_t v_0}{\partial^t x_1^2} + x_3 \frac{\partial^2 {}_t w_0}{\partial^t x_1^2} + \\
&+ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial_t u_0}{\partial^t x_1} - x_2 \frac{\partial^2 {}_t v_0}{\partial^t x_1^2} + x_3 \frac{\partial^2 {}_t w_0}{\partial^t x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial_t v_0}{\partial^t x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial_t w_0}{\partial^t x_1} \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
{}_t\boldsymbol{\varepsilon}_{x_1} &= \frac{\partial_t u_0}{\partial^t x_1} - x_2 \frac{\partial^2 {}_t v_0}{\partial^t x_1^2} + x_3 \frac{\partial^2 {}_t w_0}{\partial^t x_1^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_t u_0}{\partial^t x_1} \right)^2 - x_2 \frac{\partial_t u_0}{\partial^t x_1} \frac{\partial^2 {}_t v_0}{\partial^t x_1^2} + x_3 \frac{\partial_t u_0}{\partial^t x_1} \frac{\partial^2 {}_t w_0}{\partial^t x_1^2} + \\
&+ \frac{1}{2} x_2^2 \left(\frac{\partial^2 {}_t v_0}{\partial^t x_1^2} \right)^2 - x_2 x_3 \frac{\partial^2 {}_t v_0}{\partial^t x_1^2} \frac{\partial^2 {}_t w_0}{\partial^t x_1^2} + \frac{1}{2} x_3^2 \left(\frac{\partial^2 {}_t w_0}{\partial^t x_1^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 {}_t v_0}{\partial^t x_1^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 {}_t w_0}{\partial^t x_1^2} \right)^2
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Nas expressões subseqüentes deste trabalho, os índices superiores direitos L e NL denotam as parcelas linear e não-linear, respectivamente.

A deformação incremental linear axial no eixo centroidal, as curvaturas incrementais lineares e as rotações incrementais da seção transversal são definidas pelas Equações (3.17) a (3.21).

$${}_t\boldsymbol{\varepsilon}_0^L = \frac{\partial_t u_0}{\partial^t x_1} \quad \text{deformação incremental} \tag{3.17}$$

$${}_t\phi_z^L = \frac{\partial^2 {}_t v_0}{\partial^t x_1^2} \quad \text{curvatura incremental em } x_3 \tag{3.18}$$

$${}_t\phi_y^L = \frac{\partial^2 {}_t w_0}{\partial^t x_1^2} \quad \text{curvatura incremental em } x_2 \tag{3.19}$$

$${}_t\theta_z = \frac{\partial_t v_0}{\partial^t x_1} \quad \text{rotação incremental em torno do eixo } x_3 \tag{3.20}$$

$${}_t\theta_y = \frac{\partial_t w_0}{\partial^t x_1} \quad \text{rotação incremental em torno do eixo } x_2 \tag{3.21}$$

Substituindo-se as Equações (3.17) a (3.21) na Equação (3.16), obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
{}_t\mathcal{E}_{x_1} = & {}_t\mathcal{E}_0^L - x_{2t}\phi_z^L + x_{3t}\phi_y^L + \frac{1}{2}({}_t\mathcal{E}_0^L)^2 - x_{2t}\mathcal{E}_0^L\phi_z^L + x_{3t}\mathcal{E}_0^L\phi_y^L + \frac{1}{2}x_2^2({}_t\phi_z^L)^2 - \\
& x_2x_{3t}\phi_z^L\phi_y^L + \frac{1}{2}x_3^2({}_t\phi_y^L)^2 + \frac{1}{2}({}_t\theta_z)^2 + \frac{1}{2}({}_t\theta_y)^2
\end{aligned} \tag{3.22}$$

As Equações (3.23) e (3.29) foram obtidas ao manipular-se a Equação (3.22), eliminando os termos em x_2x_3 , x_2^2 e x_3^2 e agrupando os termos restantes nas Equações (3.24) a (3.28).

$${}_t\mathcal{E}_{x_1} = {}_t\mathcal{E}_0^L - x_{2t}\phi_z^L + x_{3t}\phi_y^L + \frac{1}{2}({}_t\mathcal{E}_0^L)^2 - x_{2t}\mathcal{E}_0^L\phi_z^L + x_{3t}\mathcal{E}_0^L\phi_y^L + \frac{1}{2}({}_t\theta_z)^2 + \frac{1}{2}({}_t\theta_y)^2 \tag{3.23}$$

$${}_t\mathcal{E}_0^{NL} = \frac{1}{2}({}_t\mathcal{E}_0^L)^2 + \frac{1}{2}({}_t\theta_z)^2 + \frac{1}{2}({}_t\theta_y)^2 \tag{3.24}$$

$${}_t\phi_z^{NL} = {}_t\mathcal{E}_0^L\phi_z^L \tag{3.25}$$

$${}_t\phi_y^{NL} = {}_t\mathcal{E}_0^L\phi_y^L \tag{3.26}$$

$${}_t\mathcal{E}_{x_1}^{NL} = {}_t\mathcal{E}_0^{NL} - x_{2t}\phi_z^{NL} + x_{3t}\phi_y^{NL} \tag{3.27}$$

$${}_t\mathcal{E}_{x_1}^L = {}_t\mathcal{E}_0^L - x_{2t}\phi_z^L + x_{3t}\phi_y^L \tag{3.28}$$

$${}_t\mathcal{E}_{x_1} = {}_t\mathcal{E}_{x_1}^L + {}_t\mathcal{E}_{x_1}^{NL} \tag{3.29}$$

Com o auxílio das Equações (3.24) a (3.28), a Equação (3.29) pode ser reescrita conforme a Equação (3.30).

$${}_t\mathcal{E}_{x_1} = {}_t\mathcal{E}_0 - x_{2t}\phi_z + x_{3t}\phi_y \tag{3.30}$$

Os incrementos totais da deformação axial e das curvaturas são obtidos com a soma das parcelas lineares com as parcelas não-lineares, conforme demonstrado pelas Equações (3.31), (3.32) e (3.33).

$${}_t\mathcal{E}_0 = {}_t\mathcal{E}_0^L + {}_t\mathcal{E}_0^{NL} \tag{3.31}$$

$${}_t\phi_z = {}_t\phi_z^L + {}_t\phi_z^{NL} \tag{3.32}$$

$${}_t\phi_y = {}_t\phi_y^L + {}_t\phi_y^{NL} \quad (3.33)$$

3.4 PRESSÃO INTERNA

Nas estruturas, as tensões e deformações resultantes têm origem nos mais variados tipos de carregamento. Para dutos enterrados sob pressão os carregamentos são geralmente identificados em duas categorias: pressão interna e carregamentos externos.

A pressão interna pode ser dividida em duas componentes básicas: pressão constante e pressão de oscilação. Como a formulação apresentada nesse trabalho considera a pressão interna constante, não se faz necessário considerar a pressão de oscilação. A seguir é apresentada a formulação da pressão constante.

3.4.1 Pressão Constante

Moser (2001) apresentou a solução de Lamé para tensões em um cilindro circular de parede espessa. Estas tensões são apresentadas pelas Equações (3.34), para tensão tangencial, e (3.35), para tensão radial.

$$S_\theta = \frac{P_i r_i^2 (r_e^2 / r^2 + 1)}{(r_e^2 - r_i^2)} \quad (3.34)$$

$$S_r = \frac{P_i r_i^2 (r_e^2 / r^2 - 1)}{(r_e^2 - r_i^2)} \quad (3.35)$$

Sendo:

S_θ – tensão tangencial;

S_r – tensão radial;

P_i – pressão interna;

r_i – raio interno;

r_e – raio externo;

r – raio para o ponto em estudo.

A tensão máxima é a tensão tangencial, a qual ocorre quando r é igual a r_i . Isto posto, obtém-se a Equação (3.36).

$$S_{máx} = \frac{P_i(r_e^2 + r_i^2)}{(r_e^2 - r_i^2)} \quad (3.36)$$

Para o caso de cilindros de parede fina ($r_i \approx r_e$), como os dutos aqui tratados, obtém-se a Equação (3.37).

$$r_e^2 + r_i^2 = (r_e + r_i)(r_e - r_i) = \bar{D}t \quad (3.37)$$

Onde:

t – espessura do duto;

\bar{D} – diâmetro médio do duto.

A espessura do duto é dada pela Equação (3.38) e o diâmetro médio pela Equação (3.39).

$$t = r_e - r_i \quad (3.38)$$

$$\bar{D} = r_e + r_i \quad (3.39)$$

Elevando-se a Equação (3.39) ao quadrado e manipulando-a propriamente, pode-se reescrever a Equação (3.36) conforme a Equação (3.40). Esta equação pode ser escrita em função do diâmetro externo D_e conforme a Equação (3.41).

$$S_{máx} = \frac{P_i(\bar{D}^2 / 2)}{\bar{D}t} = \frac{P_i\bar{D}}{2t} \quad (3.40)$$

$$S_{máx} = \frac{P_i(D_e - t)}{2t} \quad (3.41)$$

A Equação (3.40) é às vezes conhecida como fórmula de Barlow, mas é exatamente uma forma reduzida da solução de Lamé. Esta fórmula é freqüentemente utilizada para o cálculo de tensões devido à pressão interna.

3.5 TEMPERATURA

A expansão ou contração devido ao acréscimo ou decréscimo de temperatura pode induzir tensões longitudinais na parede do duto. Estas tensões são devidas à restrição longitudinal. A tensão longitudinal devido à temperatura é dada pela Equação (3.42).

$$S_{temp} = \alpha E \Delta T \quad (3.42)$$

Onde:

S_{temp} – tensão longitudinal devida à temperatura;
 α – coeficiente linear de dilatação térmica;
 ΔT – variação de temperatura;
 E – módulo de Young para o material do duto.

3.6 MECÂNICA DE DUTOS ENTERRADOS

Watkins e Anderson (2000) definiram a mecânica longitudinal de dutos enterrados como sendo a análise das deformações longitudinais comparadas com a capacidade limite de deformação. Se as deformações podem ser determinadas, então as tensões correspondentes podem ser utilizadas como alternativa básica para o projeto. As principais causas das tensões longitudinais são:

- Variações na temperatura e pressão que causam relativo alongamento ou encurtamento do duto com relação às restrições do solo e pressões longitudinais;

- Pressão longitudinal, como resultado dos mais variados fatores. Dentre eles destacam-se: pressão interna, vácuo em válvulas, redutores e cotovelos em formato “T” e “Y”, atrito com o solo;
- Flexão de dutos, que causam tensões de flexão. Causas típicas de flexão de dutos são: localização da seção do duto sobre apoios rígidos, morro ou pilares para alinhamento vertical; fundação não uniforme do leito; movimento superficial do morro ou desabamento de terra, e movimento do solo maciço ou fundação.

Cada uma das causas de tensão longitudinal mencionadas deve ser analisada separadamente, combinando-se apropriadamente os resultados para a análise global.

De acordo com Moser (2001), na mecânica dos materiais, as aplicações das tensões em uma direção produzem tensões e/ou deformações na direção perpendicular. Este fenômeno é conhecido como efeito de Poisson. Como visto anteriormente, um duto com pressão interna possui uma tensão circunferencial. A tensão longitudinal associada é dada pela Equação (3.43).

$$S_p = \nu S_\theta \quad (3.43)$$

Onde:

S_θ – tensão circunferencial;

S_p – tensão longitudinal associada à tensão circunferencial;

ν – coeficiente de Poisson.

Segundo Watkins e Anderson (2000), valores de tensão longitudinal associada à tensão circunferencial não são usualmente críticos. Ainda segundo estes autores, se o duto enterrado é soldado e muito longo, ele é efetivamente restringido (por atrito do solo, se não restringido nas extremidades) e é influenciado pela pressão longitudinal devido ao acréscimo de temperatura e pressão interna.

3.7 FORMULAÇÃO VARIACIONAL

Como já apresentado, a formulação aplicada neste trabalho inclui os efeitos de não-linearidade material e não-linearidade geométrica. Isto posto e de acordo com Bathe (1996), o princípio dos trabalhos virtuais na formulação Lagrangeana Total é o dado pela Equação (3.44), onde o termo à esquerda representa o trabalho virtual interno enquanto que o termo à direita representa o trabalho virtual externo.

$$\int_{0V} {}^{t+\Delta t}_0 S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}_0 \varepsilon_{ij} d^0V = \int_{0V} {}^{t+\Delta t}_0 f_i^B \delta u_i d^0V + \int_{0S_f} {}^{t+\Delta t}_0 f_i^S \delta u_i^S d^0S \quad (3.44)$$

Na Equação (3.44) ${}^{t+\Delta t}_0 f_i^B$ são as componentes de forças aplicadas externamente por unidade de volume no tempo $t + \Delta t$, ${}^{t+\Delta t}_0 f_i^S$ são as trações de superfície aplicadas externamente por unidade de área no tempo $t + \Delta t$, e δu_i^S é δu_i determinado ao longo da superfície 0S_f . As tensões e deformações incrementais são as apresentadas pelas Equações (3.45) e (3.46), respectivamente.

$${}^{t+\Delta t}_0 S_{ij} = {}^t_0 S_{ij} + {}_0 S_{ij} \quad (3.45)$$

$${}^{t+\Delta t}_0 \varepsilon_{ij} = {}^t_0 \varepsilon_{ij} + {}_0 \varepsilon_{ij} \quad (3.46)$$

Segundo a técnica RMDI, o trabalho virtual pode ser obtido levando-se em conta as componentes de tensões e deformações do elemento finito, como apresentado pela Equação (3.47). À esquerda desta equação, os primeiros dois termos representam o trabalho virtual das tensões do duto enquanto que os três termos restantes representam o trabalho virtual das molas de representação do solo, onde os subscritos AS, BS, US, LLS e RLS indicam mola axial, mola de base, mola superior, mola lateral esquerda e mola lateral direita, respectivamente. À direita da mesma equação está o trabalho virtual externo introduzido pela aplicação de carga.

$$\begin{aligned}
& \int_{0_V} {}^{t+\Delta t} S_{x1} \delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{x1} d^0 V + \int_{0_V} {}^{t+\Delta t} S_{\theta} \delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{\theta} d^0 V + \int_{0_L} {}^{t+\Delta t} F_{AS} \delta {}^{t+\Delta t} u_0 d^0 x_1 + \\
& + \int_{0_L} \left({}^{t+\Delta t} F_{BS} + {}^{t+\Delta t} F_{US} \right) \delta {}^{t+\Delta t} v_0 d^0 x_1 + \int_{0_L} \left({}^{t+\Delta t} F_{LLS} + {}^{t+\Delta t} F_{RLS} \right) \delta {}^{t+\Delta t} w_0 d^0 x_1 = \delta {}^{t+\Delta t} W_{ext}
\end{aligned} \quad (3.47)$$

As equações relacionadas às tensões e deformações incrementais são as dadas pelas Equações (3.48) a (3.51). Nestas equações os sobrescritos L e NL denotam as componentes lineares e não-lineares da deformação longitudinal.

$${}^{t+\Delta t} S_{x1} = {}^t S_{x1} + {}_0 S_{x1} \quad (3.48)$$

$${}^{t+\Delta t} S_{\theta} = {}^t S_{\theta} = \text{constante} \quad (3.49)$$

$$\delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{x1} = \delta {}_0 \epsilon_{x1} = \delta {}_0 \epsilon_{x1}^L + \delta {}_0 \epsilon_{x1}^{NL} \quad (3.50)$$

$$\delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{\theta} = \delta {}_0 \epsilon_{\theta} = {}^t C_{\theta x1} \delta {}_0 \epsilon_{x1} \quad (3.51)$$

Onde:

S_{x1} – tensão longitudinal;

S_{θ} – tensão circunferencial constante;

ϵ_{θ} – deformação na direção circunferencial;

$C_{\theta x1}$ – razão entre a deformação circunferencial e a deformação longitudinal.

3.8 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DO MATERIAL

Uma observação importante feita por Bathe (1996) sobre as análises elástica e inelástica é que na solução elástica a tensão total depende apenas da deformação total, enquanto que no cálculo da reposta inelástica a tensão total no tempo t depende tanto do histórico de deformações quanto do histórico de tensões.

A seguir são apresentadas as relações constitutivas abrangendo tanto o comportamento elástico quanto o comportamento inelástico (elásto-plástico) do material. Em seguida, é apresentada a metodologia para avaliação dos incrementos de tensão. Por fim, são apresentadas as formulações da relação tensão-deformação e das forças interna do duto.

3.8.1 Comportamento Elástico do Material

De acordo com Bathe (1996), a relação constitutiva para um material elástico considerando-se a presença de grandes deformações é escrita seguindo uma formulação Lagrangeana Total conforme a Equação (3.52).

$${}^t_0S_{ij} = {}^t_0C_{ijrs} {}^t_0\epsilon_{rs} \quad (3.52)$$

Sendo:

${}^t_0S_{ij}$ – componentes do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff;

${}^t_0\epsilon_{rs}$ – componentes do tensor de deformações de Green-Lagrange;

${}^t_0C_{ijrs}$ – componentes do tensor de relações constitutivas.

Considerando as condições de tensões tridimensionais e materiais isotrópicos, as componentes do tensor de relações constitutivas são obtidas conforme a Equação (3.53).

$${}^t_0C_{ijrs} = \lambda \delta_{ij} \delta_{rs} + \mu (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}) \quad (3.53)$$

Onde λ e μ são as constantes de Lamé, obtidas através das Equações (3.54) e (3.55), respectivamente. A constante δ_{ij} é o delta de Kronecker, dado pela Equação (3.56).

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.54)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.55)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0; & i \neq j \\ 1; & i = j \end{cases} \quad (3.56)$$

Assim sendo, segundo Souza (2005), as componentes do tensor de relações constitutivas são idênticas às componentes da matriz de tensão-deformação para materiais isotrópicos. Para o modelo de problemas tridimensionais a matriz de tensão-deformação generalizada é dada pela Equação (3.57).

$$\mathbf{C}^E = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Sendo:

\mathbf{C}^E – matriz de tensão-deformação;

E – módulo de Young;

ν – coeficiente de Poisson.

De acordo com Souza (2005), na análise de grandes deslocamentos, grandes rotações e pequenas deformações, a Equação (3.52) fornece uma descrição material natural, devido às componentes do segundo tensor de tensões Piola-Kirchhoff e do tensor de deformações Green-Lagrange serem invariantes a rotações de corpo rígido.

3.8.2 Comportamento Inelástico do Material (Elastoplasticidade)

O uso da formulação Lagrangeana Total em análises inelásticas é uma extensão direta do uso desta em condições elásticas.

Segundo Bathe (1996), o incremento de tensão é obtido usando a decomposição de deformações apresentada pela Equação (3.58) na relação expressa pela Equação (3.59).

$$d\epsilon_{rs} = d\epsilon_{rs}^E + d\epsilon_{rs}^P \quad (3.58)$$

$$dS_{ij} = C_{ijrs}^E d\epsilon_{rs}^E = C_{ijrs}^E (d\epsilon_{rs} - d\epsilon_{rs}^P) \quad (3.59)$$

Onde:

$d\epsilon_{rs}$ – componentes de deformação incremental total;

$d\epsilon_{rs}^E$ – componentes deformação incremental elástica;

$d\epsilon_{rs}^P$ – componentes deformação incremental plástica;

C_{ijrs}^E – componentes do tensor de relações constitutivas elástico.

Para que o comportamento do material seja caracterizado como sendo elástico-plástico faz-se necessário que se cumpram as seguintes relações:

- Relação tensão-deformação elástica;
- Função de escoamento: fornece a condição de escoamento que especifica o estado de tensão multiaxial correspondente ao escoamento plástico;
- Lei de escoamento: relaciona os incrementos de deformação plástica com a tensão corrente e os incrementos de tensão;
- Lei de endurecimento: especifica como a função de escoamento é modificada durante o escoamento plástico.

O critério de escoamento fornece uma relação matemática para prever sob quais condições o material apresenta deformações plásticas, quando solicitado por qualquer tipo de carregamento. Para um estado uniaxial de tensões, a deformação plástica inicia-se quando a tensão aplicada atinge a tensão de escoamento do material. Para

estados de tensões biaxiais ou triaxiais, o escoamento ocorre quando as tensões aplicadas atingem os valores calculados de acordo com o critério de escoamento adotado.

A forma geral da função do escoamento no tempo t é ${}^t\Phi({}^tS_{ij}, {}^t\varepsilon_{rs}^P, \dots)$, onde $({}^tS_{ij}, {}^t\varepsilon_{rs}^P, \dots)$ denota as variáveis que dependem da caracterização do material. A resposta instantânea do material é elástica se ${}^t\Phi < 0$. Dependendo do carregamento, a resposta pode ser elástica ou plástica se ${}^t\Phi = 0$. A condição ${}^t\Phi > 0$ é inadmissível.

Adotou-se um comportamento elásto-plástico para o material duto, onde o critério de escoamento se dá segundo o critério de Von Mises com endurecimento isotrópico.

O fenômeno de encruamento ou endurecimento é o processo de deformação plástica que modifica a tensão de escoamento inicial aumentando a faixa de comportamento elástico. No caso particular em que o módulo de encruamento é igual na tração e na compressão, o material é dito com endurecimento isotrópico.

O critério de Von Mises, conforme Branco (1985), baseia-se na observação experimental de que a pressão hidrostática, responsável pela variação de volume em um sólido, não provoca deformações permanentes. Como a deformação plástica ocorre a volume constante, a componente hidrostática existente em um estado geral de tensões aplicado a um corpo não influencia a tensão de escoamento.

Segundo Zhou e Murray (1996) geralmente considera-se a pressão interna constante no duto, logo, a relação tensão-deformação para o elemento viga-duto é uniaxial no sistema de coordenadas locais. Ainda conforme estes autores, a tensão circunferencial constante introduzida pela pressão interna deve ser levada em consideração na relação tensão-deformação. Portanto, para esse estado de tensão biaxial o escoamento ocorre quando a tensão efetiva, determinada através das tensões longitudinais e circunferenciais, atinge a tensão de escoamento determinada segundo o critério de Von Mises. Por hipótese, a tensão radial é considerada nula por seu valor ser muito pequeno se comparado com os valores das outras tensões.

Como na plasticidade de Von Mises, de acordo com Bathe (1996), as deformações volumétricas são nulas, a relação tensão-deformação geral pode ser escrita

conforme a Equação (3.60). Nesta equação, ${}^t\mathbf{S}$ é o tensor desviador de tensões cujas componentes (${}^t\sigma_{ij}$) são dadas pela equação (3.61).

$${}^t\mathbf{S} = \frac{E}{1+\nu} ({}^t\boldsymbol{\varepsilon}' - {}^t\boldsymbol{\varepsilon}^P) \quad (3.60)$$

$${}^t\sigma_{ij} = {}^tS_{ij} - {}^tS_m \delta_{ij} \quad (3.61)$$

A tensão média tS_m é dada pela Equação (3.62).

$${}^tS_m = \frac{{}^tS_{ii}}{3} \quad (3.62)$$

Já as componentes do tensor desviador de deformação ${}^t\boldsymbol{\varepsilon}'$ são dadas pela Equação (3.63). A deformação média ${}^t\varepsilon_m$ é dada pela Equação (3.64). O tensor de deformação plástica ${}^t\boldsymbol{\varepsilon}^P$ possui componentes ${}^t\varepsilon_{ij}^P$.

$${}^t\varepsilon'_{ij} = {}^t\varepsilon_{ij} - {}^t\varepsilon_m \delta_{ij} \quad (3.63)$$

$${}^t\varepsilon_m = \frac{{}^t\varepsilon_{ii}}{3} \quad (3.64)$$

Logo, a tensão média pode ser obtida, ainda, pela Equação (3.65).

$${}^tS_m = \frac{E}{1-2\nu} {}^t\varepsilon_m \quad (3.65)$$

As Equações (3.60) e (3.65) representam a forma integrada da Equação (3.59). Nota-se que as tensões desviadoras dependem das deformações plásticas, as quais dependem do histórico de tensões. Por outro lado, nota-se que as tensões médias são independentes das tensões plásticas porque a deformação plástica média é nula, ou seja, a deformação plástica é isocórica (o volume se preserva).

Nas formulações subseqüentes, a notação para os sub-índices será dada de acordo com a convenção em coordenadas cilíndricas $i, j = \theta, r, x$. Os sub-índices θ, r, x representam as direções circunferencial, radial e longitudinal, respectivamente.

Segundo Zhou e Murray (1996), ao se desprezarem tensões de cisalhamento e as deformações correspondentes, e com o auxílio das Equações (3.61) a (3.65), a relação incremental tensão-deformação dada pela Equação (3.60) pode ser reescrita conforme a Equação (3.66).

$$\begin{Bmatrix} {}_0S_\theta \\ {}_0S_r \\ {}_0S_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda' & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda' & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}_0\mathcal{E}_\theta \\ {}_0\mathcal{E}_r \\ {}_0\mathcal{E}_x \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^tP_{\theta\theta} & {}^tP_{\theta r} & {}^tP_{\theta x} \\ {}^tP_{r\theta} & {}^tP_{rr} & {}^tP_{rx} \\ {}^tP_{x\theta} & {}^tP_{xr} & {}^tP_{xx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}_0\mathcal{E}_\theta \\ {}_0\mathcal{E}_r \\ {}_0\mathcal{E}_x \end{Bmatrix} \quad (3.66)$$

As Equações (3.67) a (3.69) fornecem os termos dos vetores e das matrizes da Equação (3.66).

$$\lambda' = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.67)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.68)$$

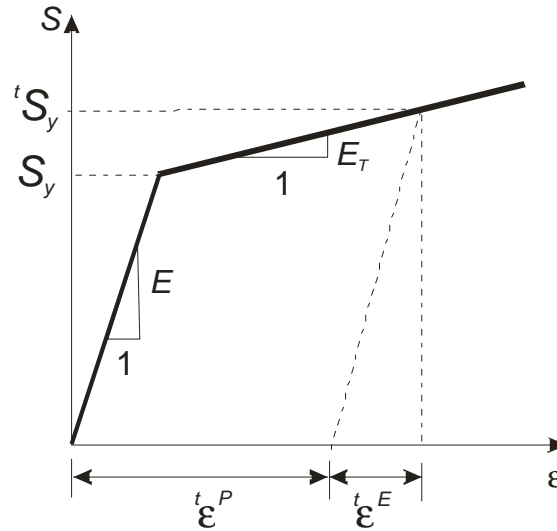
$${}^tP_{mn} = \frac{3G}{\left(1 + \frac{H'}{3G}\right) {}^t\bar{S}^2} {}^t\sigma_{mm} {}^t\sigma_{nn}, \quad m, n = \theta, r, x \quad (3.69)$$

Na nomenclatura dada pela Equação (3.69), os subscritos repetidos não representam soma. O módulo de encruamento H' é dado pela Equação (3.70). Nesta equação, E_T é o módulo tangente, ilustrado pela Figura 3.3.

$$H' = \frac{EE_T}{E - E_T} \quad (3.70)$$

Segundo Bathe (1996), para o caso de plasticidade perfeita, o módulo de encruamento é igual a zero e a tensão efetiva \bar{S} é igual à tensão de escoamento S_y .

FIGURA 3.3 – DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO



Fonte: Bathe (1982).

A trajetória da curva no diagrama tensão-deformação ilustrada pela Figura 3.3 representa o comportamento linear do material tanto na fase elástica quanto na fase plástica. Materiais que apresentam esse tipo de comportamento são conhecidos como materiais bi-lineares.

Adotando-se a hipótese de tensão radial nula para as Equações (3.61) e (3.62), as componentes do tensor desviador de tensões tornam-se as expressas pelas Equações (3.71) a (3.73). Nestas equações são utilizados os subscritos simples porque apenas as componentes normais foram consideradas.

$${}^t_0\sigma_\theta = {}^t_0S_\theta - \left(\frac{{}^t_0S_\theta + {}^t_0S_r + {}^t_0S_x}{3} \right) = {}^t_0S_\theta - \left(\frac{{}^t_0S_\theta + 0 + {}^t_0S_x}{3} \right) = \frac{1}{3}(2{}^t_0S_\theta - {}^t_0S_x) \quad (3.71)$$

$${}^t_0\sigma_r = -\frac{1}{3}({}^t_0S_\theta + {}^t_0S_x) \quad (3.72)$$

$${}^t_0\sigma_x = \frac{1}{3}(2{}^t_0S_x - {}^t_0S_\theta) \quad (3.73)$$

A tensão circunferencial ${}^tS_\theta$ é determinada, segundo Moser (2001), conforme a Equação (3.74).

$${}^tS_\theta = \frac{P_i(D_e - t)}{2t} \quad (3.74)$$

Onde:

P_i – pressão interna constante;
 D_e – diâmetro externo do duto;
 t – espessura do duto.

Partindo das suposições definidas por Zhou e Murray (1996) de que a tensão radial é considerada nula e a tensão circunferencial é constante devido à condição de pressão interna de operação constante no duto, as tensões incrementais na direção radial e circunferencial também serão nulas. Assim sendo, partindo-se da Equação (3.66) e aplicando as condições definidas por Zhou e Murray, obtêm-se as Equações (3.75) e (3.76).

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \lambda' & \lambda \\ \lambda & \lambda' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^tP_{\theta\theta} & {}^tP_{\theta r} \\ {}^tP_{r\theta} & {}^tP_{rr} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} {}_0\epsilon_\theta \\ {}_0\epsilon_r \end{Bmatrix} + \left(\begin{Bmatrix} \lambda \\ \lambda \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} {}^tP_{\theta x} \\ {}^tP_{rx} \end{Bmatrix} \right) {}_0\epsilon_x \quad (3.75)$$

$${}^tS_x = (\lambda_0 \epsilon_\theta + \lambda_0 \epsilon_r - {}^tP_{x\theta} {}_0\epsilon_\theta - {}^tP_{xr} {}_0\epsilon_r) + \lambda'_0 \epsilon_x - {}^tP_{xx} {}_0\epsilon_x \quad (3.76)$$

Rearranjando os termos da Equação (3.75) e admitindo-se que exista inversa, têm-se as Equações (3.77) e (3.78).

$$\begin{Bmatrix} {}_0\epsilon_\theta \\ {}_0\epsilon_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^tC_{\theta x} \\ {}^tC_{rx} \end{Bmatrix} {}_0\epsilon_x \quad (3.77)$$

$$\begin{Bmatrix} {}^tC_{\theta x} \\ {}^tC_{rx} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \lambda'_0 - {}^tP_{\theta\theta} & \lambda'_0 - {}^tP_{\theta r} \\ \lambda'_0 - {}^tP_{r\theta} & \lambda'_0 - {}^tP_{rr} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \lambda'_0 - {}^tP_{\theta x} \\ \lambda'_0 - {}^tP_{rx} \end{Bmatrix} \quad (3.78)$$

A relação constitutiva elásto-plástica incremental, apresentada pelas Equações (3.79) e (3.80), é obtida utilizando-se a Equação (3.77) na Equação (3.76). Para o caso particular onde os incrementos de deformação são elásticos, o módulo elásto-plástico ${}^t_0C^{EP}$ se iguala ao módulo de Young.

$${}_tS_x = {}^tC^{EP} {}_t\epsilon_x \quad (3.79)$$

$${}_0C^{EP} = {}_0C_{\theta\theta}(\lambda_0 - {}_0P_{x\theta}) + {}_0C_{rx}(\lambda - {}_0P_{xr}) + \lambda' - {}_0P_{xx} \quad (3.80)$$

A tensão efetiva, apresentada pela Equação (3.81), é determinada a partir das Equações (3.71) e (3.73).

$${}_0\bar{S} = \sqrt{\frac{3}{2} {}_0\sigma_{ij} {}_0\sigma_{ij}} = \sqrt{({}_0S_{\theta}^2 - {}_0S_{\theta} {}_0S_x + {}_0S_x^2)} \quad (3.81)$$

A deformação plástica incremental no tempo t é expressa pela Equação (3.82), cujas componentes resultam da Equação (3.83).

$${}_0\epsilon^P = \sqrt{\frac{3}{2} {}_0\epsilon_{ij}^P {}_0\epsilon_{ij}^P} = \sqrt{\frac{3}{2} ({}_0\epsilon_{\theta}^{P^2} + {}_0\epsilon_r^{P^2} + {}_0\epsilon_x^{P^2})} \quad (3.82)$$

$$\begin{Bmatrix} {}_0\epsilon_{\theta}^P \\ {}_0\epsilon_r^P \\ {}_0\epsilon_x^P \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_0P_{\theta\theta} & {}_0P_{\theta r} & {}_0P_{\theta x} \\ {}_0P_{r\theta} & {}_0P_{rr} & {}_0P_{rx} \\ {}_0P_{x\theta} & {}_0P_{xr} & {}_0P_{xx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}_0C_{\theta\theta} \\ {}_0C_{rx} \\ 1 \end{Bmatrix} {}_0\epsilon_x \quad (3.83)$$

3.8.3 Avaliação dos Incrementos de Tensão

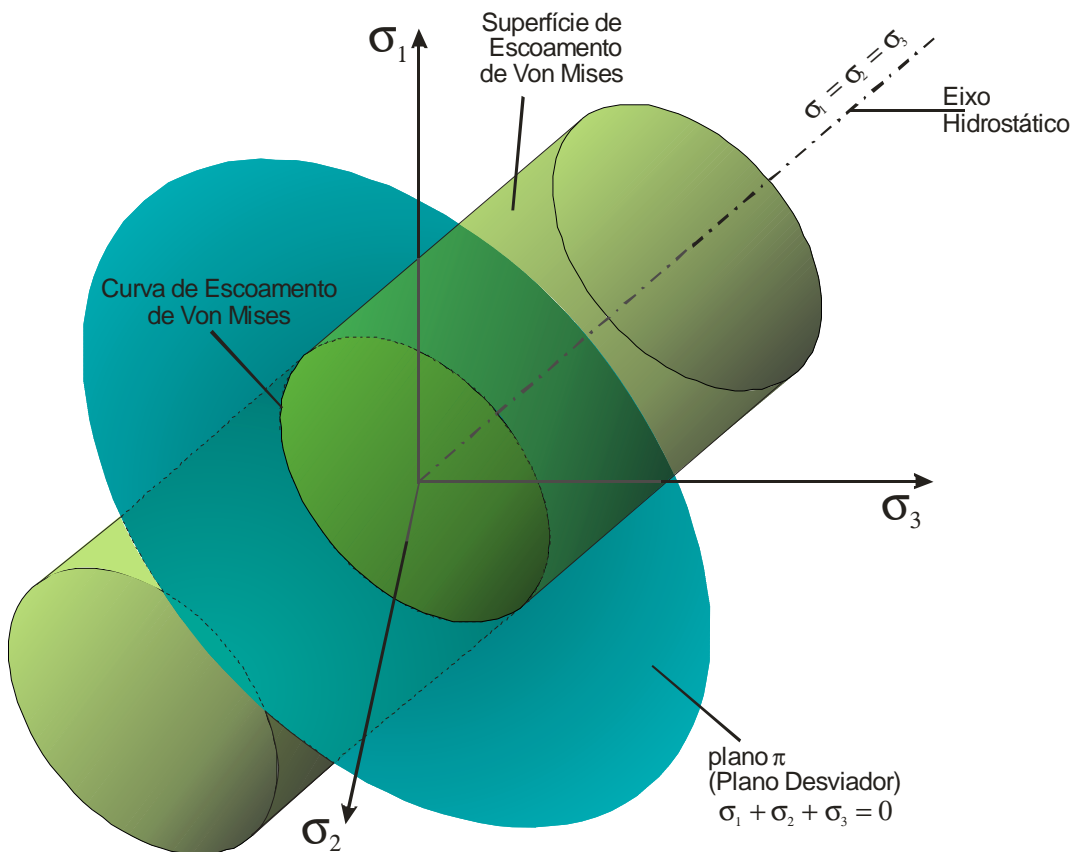
Nesta seção é apresentada uma metodologia para avaliar os incrementos de tensões para uma dada deformação incremental. Quando os valores das tensões longitudinais e circunferenciais atingem a tensão de escoamento determinada segundo o critério de Von Mises, utiliza-se um método de integração implícito para determinar o valor da tensão total na configuração de equilíbrio corrente. Segundo Souza (2005),

este método é conhecido como método de projeção ao ponto mais próximo, que no caso de uma superfície de Von Mises, recai no método do retorno radial.

De acordo com Bathe (1982), a superfície de escoamento de Von Mises é um cilindro no espaço das tensões principais, ilustrado pela Figura 3.4, e é dada pela Equação (3.84).

$${}^t\Phi = \frac{1}{2} {}^t\sigma_{ij} {}^t\sigma_{ij} - \frac{1}{3} {}^tS_y^2 \quad (3.84)$$

FIGURA 3.4 – SUPERFÍCIE DE ESCOAMENTO DE VON MISES

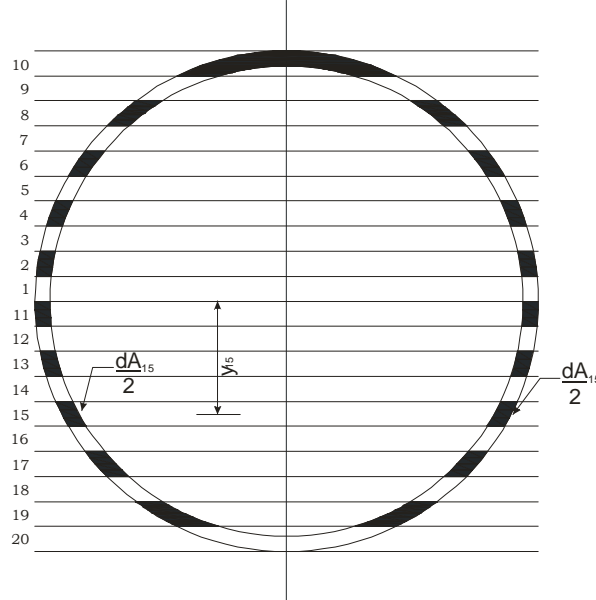


Fonte: Adaptado de Bathe (1982).

Assumindo que as tensões tS_x , as deformações ${}^t\varepsilon_x$ e ${}^t\varepsilon_x^P$, e os deslocamentos ${}^t\mathbf{u}$ no tempo t são conhecidos, os incrementos de deslocamentos e os incrementos de deformações são determinados no tempo $t + \Delta t$.

A seção transversal do duto é dividida em faixas iguais, conforme apresentado pela Figura 3.5. Em cada faixa e para cada ponto interno de Gauss, na integração numérica, a tensão é avaliada ao longo da seção.

FIGURA 3.5 – SEÇÃO TRANSVERSAL DIVIDIDA EM FAIXAS



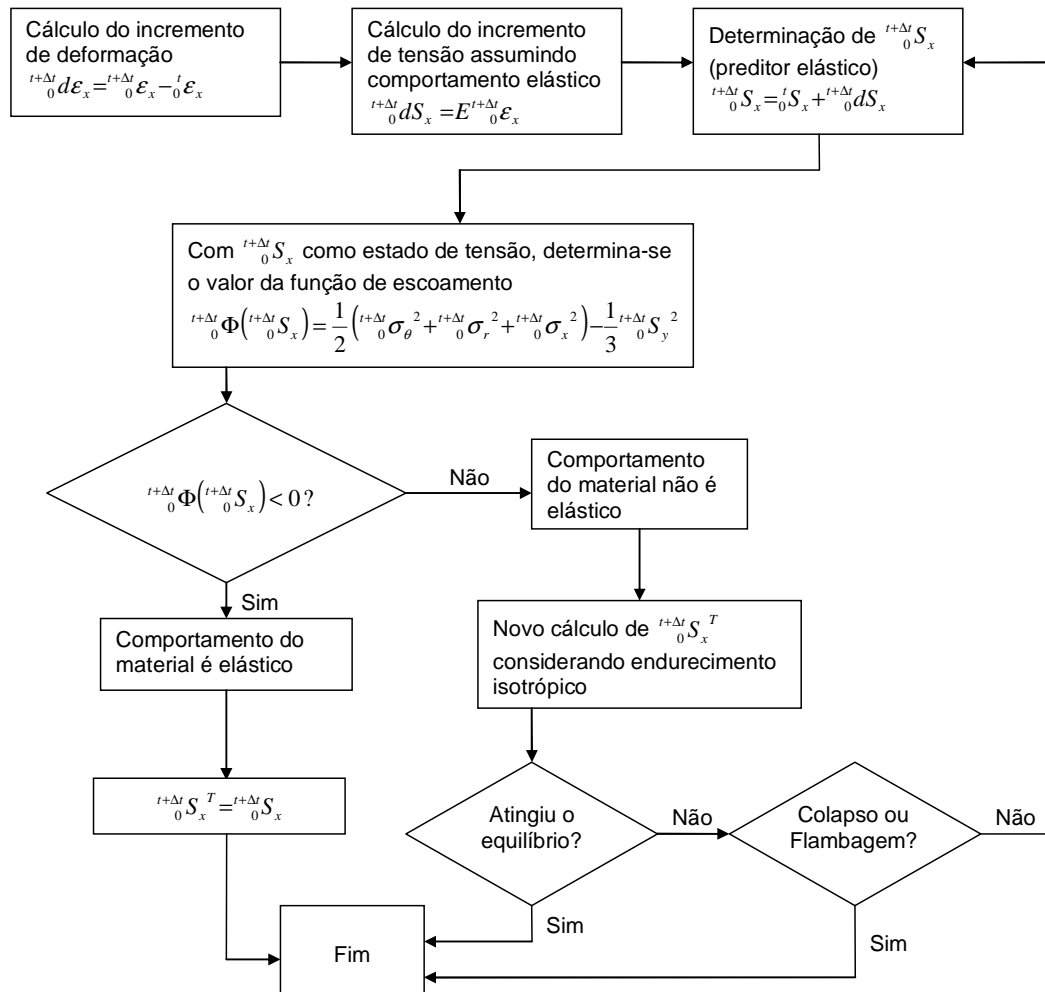
Fonte: Mejía (2003).

O procedimento para cálculo da tensão total ${}^{t+\Delta t}_0 S_x^T$ no tempo $t + \Delta t$ se dá conforme o fluxograma dado na Figura 3.6.

As forças internas são determinadas dividindo-se a seção transversal em np faixas iguais (Fig. 3.5), onde cada faixa de área tem uma força interna correspondente a sua posição e a sua área. Assim sendo, o vetor de força é obtido ao longo do elemento por integração numérica através do método geral da Quadratura Gaussiana. Logo, cada ponto de integração possui um vetor de força interna.

De acordo com Zhou e Murray (1996), o vetor de força desbalanceado é determinado a partir do vetor de carregamento e do vetor das forças equilibradoras. Este vetor desbalanceado é utilizado para avaliar os incrementos de deslocamentos e deformações seguintes.

FIGURA 3.6 – FLUXOGRAMA PARA AVALIAÇÃO DOS INCREMENTOS DE TENSÃO



Fonte: Adaptado de Souza (2005).

Sendo:

${}^{t+\Delta t}_0 \epsilon_x$ – deformação total no tempo $t + \Delta t$ em relação à configuração de referência 0;

${}^t_0 \epsilon_x$ – deformação total no tempo t em relação à configuração de referência 0;

${}^t_0 S_x$ – tensão total no tempo t em relação à configuração de referência 0.

3.8.4 Relação Tensão – Deformação do Duto e Forças Internas

As Equações (3.85) a (3.90) apresentam os coeficientes de rigidez para a seção transversal do duto. Estas equações foram obtidas a partir da equação do trabalho virtual por Souza (2005).

$${}^t_0K_1 = \int_{{}_0A} {}^tC^{EP} d{}_0A \quad (3.85)$$

$${}^t_0K_2 = \int_{{}_0A} \frac{{}^tC^{EP} I_{x3}}{{}_0A} d{}_0A \quad (3.86)$$

$${}^t_0K_3 = -\int_{{}_0A} {}^tC^{EP} {}_0x_2 d{}_0A \quad (3.87)$$

$${}^t_0K_4 = \int_{{}_0A} {}^tC^{EP} {}_0x_3 d{}_0A \quad (3.88)$$

$${}^t_0K_5 = 0 \quad (3.89)$$

$${}^t_0K_6 = \int_{{}_0A} \frac{{}^tC^{EP} I_{x2}}{{}_0A} d{}_0A \quad (3.90)$$

Sendo:

${}_0A$ – área inicial da seção transversal;

${}^tC^{EP}$ – módulo elásto-plástico no tempo t ;

I_{x2} – momento de inércia com relação ao eixo x_2 ;

I_{x3} – momento de inércia com relação ao eixo x_3 ;

x_2 e x_3 – coordenadas cartesianas locais.

Para materiais isotrópicos, a matriz tensão-deformação para o material do duto é dada pela Equação (3.91) na forma generalizada.

$${}^t_0\mathbf{D}^P = \begin{bmatrix} {}^t_0K_1 & {}^t_0K_3 & {}^t_0K_4 \\ {}^t_0K_3 & {}^t_0K_2 & {}^t_0K_5 \\ {}^t_0K_4 & {}^t_0K_5 & {}^t_0K_6 \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

Particularmente, para materiais elástico-lineares, a matriz tensão-deformação do material do duto será como a apresentada pela Equação (3.92), onde E é o módulo de Young.

$${}^t_0\mathbf{D}^P = \begin{bmatrix} E {}_0A & 0 & 0 \\ 0 & EI_{x3} & 0 \\ 0 & 0 & EI_{x2} \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

As forças internas equivalentes no tempo t são as apresentadas pelas Equações (3.93) a (3.95). Estas forças são as componentes do vetor \mathbf{F}_{int} . Este vetor é dado pela Equação (3.96).

$${}^t_0F_{eq} = \int_0^A \left({}^tS_{x1} + {}^tC_{\theta x} {}^tS_{\theta} \right) d^0A \quad (3.93)$$

$${}^t_0M_{eq1} = - \int_0^A \left({}^tS_{x1} + {}^tC_{\theta x} {}^tS_{\theta} \right) x_2 d^0A \quad (3.94)$$

$${}^t_0M_{eq2} = \int_0^A \left({}^tS_{x1} + {}^tC_{\theta x} {}^tS_{\theta} \right) x_3 d^0A \quad (3.95)$$

$${}^t\mathbf{F}_{\text{int}}^T = \left\{ {}^t_0F_{eq} \quad {}^t_0M_{eq1} \quad {}^t_0M_{eq2} \right\} \quad (3.96)$$

Três matrizes de forças internas são apresentadas pelas Equações (3.97) a (3.99).

$${}^t_0\mathbf{F} = \begin{bmatrix} {}^t_0F_{eq} & 0 & 0 \\ 0 & {}^t_0F_{eq} & 0 \\ 0 & 0 & {}^t_0F_{eq} \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

$${}^t_0\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} {}^t_0M_{eq1} & 0 & 0 \\ 0 & {}^t_0M_{eq1} & 0 \\ 0 & 0 & {}^t_0M_{eq1} \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

$${}^t_0\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} {}^t_0M_{eq2} & 0 & 0 \\ 0 & {}^t_0M_{eq2} & 0 \\ 0 & 0 & {}^t_0M_{eq2} \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

3.9 INTERAÇÃO SOLO – ESTRUTURA

O desempenho do duto, segundo Moser (2001), é influenciado pela interação solo-estrutura, a qual depende das propriedades do duto e do solo circundante. Por este motivo, o custo do sistema total está atrelado à interação entre o solo e a estrutura.

De acordo com Freitas (2006), o solo tem dois efeitos opostos na interação com dutos, especialmente os aquecidos. Quando a restrição causada pelo solo é bem

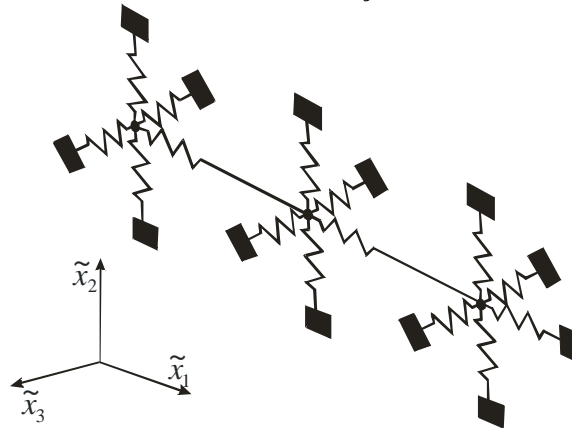
feita, esta pode restringir a movimentação do duto, efeito que é benéfico do ponto de vista de segurança contra a flambagem.

Por outro lado, quando a restrição causada pelo solo é parcial, sendo insuficiente para restringir o movimento do duto, esta cria condições de contorno necessárias para que ocorra a flambagem. Ao ter a movimentação axial restringida pelo solo, ocorrem esforços de compressão no duto, que dependendo das reações lateral ou vertical e das imperfeições iniciais, podem vencer a resistência do solo, iniciando o processo de flambagem.

O modelo de interação solo-estrutura no presente trabalho é constituído por uma série de molas ao longo do duto, as quais concentram a reação do solo em pontos discretos. Terzaghi, conforme apresentado por Pinto (2000), foi pioneiro na realização desta analogia mecânica aplicada à análise de adensamento do solo.

A Figura 3.7 apresenta o modelo de interação solo-estrutura utilizado. As paredes do duto estão conectadas a uma série de molas ao longo do eixo do duto. As constantes relacionadas a estas molas são referidas como mola axial (índice AS), mola de base (índice BS), mola superior (índice US), mola lateral esquerda (índice LLS) e mola lateral direita (índice RLS).

FIGURA 3.7 – MODELO DE INTERAÇÃO SOLO – ESTRUTURA



Fonte: Souza (2005).

Nas seções a seguir é apresentada a formulação utilizada para obtenção das deformações das molas de representação do solo. As relações constitutivas das molas de

representação do solo, utilizadas na determinação das forças de reação das molas, são apresentadas na seqüência.

3.9.1 Deformação das Molas de Representação do Solo

A posição relativa do duto determina as deformações nas molas. A deformação incremental das molas transversais, avaliadas no sistema de coordenadas local, é determinada de acordo com o vetor de deslocamento do seguinte modo:

$$\text{se } {}_t v_0 > 0, {}^t \Delta_{BS} = 0 \text{ e } {}^t \Delta_{US} = -{}_t v_0 \quad (3.100)$$

$$\text{se } {}_t v_0 < 0, {}^t \Delta_{BS} = -{}_t v_0 \text{ e } {}^t \Delta_{US} = 0 \quad (3.101)$$

$$\text{se } {}_t w_0 > 0, {}^t \Delta_{LLS} = 0 \text{ e } {}^t \Delta_{RLS} = -{}_t w_0 \quad (3.102)$$

$$\text{se } {}_t w_0 < 0, {}^t \Delta_{LLS} = -{}_t w_0 \text{ e } {}^t \Delta_{RLS} = 0 \quad (3.103)$$

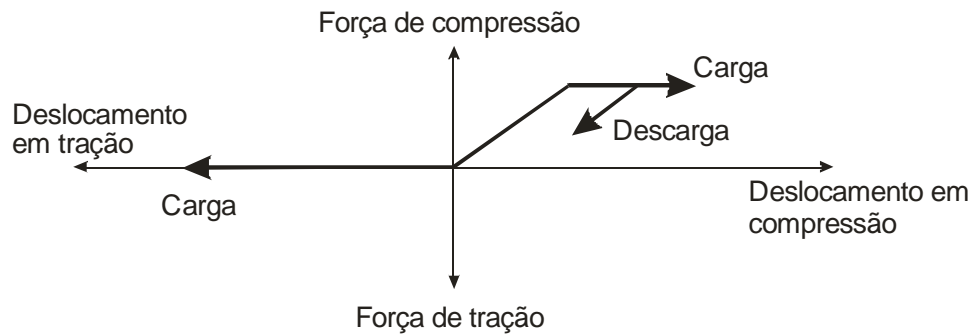
Nas Equações (3.100) a (3.103), ${}^t \Delta_{BS}$, ${}^t \Delta_{US}$, ${}^t \Delta_{LLS}$, e ${}^t \Delta_{RLS}$ são as deformações de encurtamento para as molas de base, superior, lateral esquerda e lateral direita, respectivamente. A deformação incremental longitudinal é dada pela Equação (3.104), onde ${}^t \Delta_{AS}$ é a deformação da mola tanto para encurtamento quanto para alongamento.

$${}^t \Delta_{AS} = -{}_t u_0 \quad (3.104)$$

3.9.2 Relações Constitutivas das Molas de Representação do Solo

Segundo Souza (2005), a relação constitutiva para as molas de representação do solo relaciona a força e a deformação destas. As molas transversais possuem relação força-deformação elástica-perfeitamente plástica na compressão e não têm capacidade de transmitirem força na tração, conforme ilustrado pela Figura 3.8. Como consequência, pode haver no máximo duas molas transversais atuando simultaneamente, com força não-nula, em um nó.

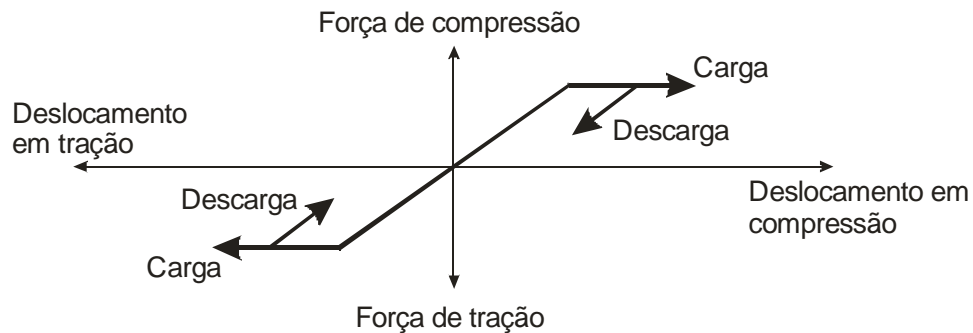
FIGURA 3.8 – DIAGRAMA FORÇA–DEFORMAÇÃO PARA AS MOLAS TRANSVERSAIS



Fonte: Mejía (2003).

Conforme apresentado pela Figura 3.9, as molas axiais possuem o mesmo comportamento elástico-perfeitamente plástico tanto na compressão quanto na tração.

FIGURA 3.9 – DIAGRAMA FORÇA–DEFORMAÇÃO PARA AS MOLAS AXIAIS



Fonte: Mejía (2003).

A matriz tensão-deformação para as molas de representação do solo é apresentada pela Equação (3.105), onde ${}^t\kappa_{AS}$, ${}^t\kappa_{BS}$, ${}^t\kappa_{US}$, ${}^t\kappa_{LLS}$, e ${}^t\kappa_{RLS}$, são as rigidezes de mola por unidade de comprimento para as molas axial, de base, superior, lateral esquerda e lateral direita, respectivamente.

$${}^t_0\mathbf{D}^S = \begin{bmatrix} {}^t\kappa_{AS} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^t\kappa_{BS} & 0 & {}^t\kappa_{US} & 0 \\ 0 & 0 & {}^t\kappa_{LLS} & 0 & {}^t\kappa_{RLS} \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

As forças incrementais de compressão para as molas transversais são apresentadas pelas Equações (3.106) a (3.109). Estas forças são assumidas como negativa nas molas transversais.

$${}^tF_{BS} = {}^t\kappa_{BS} {}^t\Delta_{BS}, \text{ onde } 0 \leq {}^tF_{BS} \leq {}^tF_{YBS} \quad (3.106)$$

$${}^tF_{US} = {}^t\kappa_{US} {}^t\Delta_{US}, \text{ onde } 0 \leq {}^tF_{US} \leq {}^tF_{YUS} \quad (3.107)$$

$${}^tF_{LLS} = {}^t\kappa_{LLS} {}^t\Delta_{LLS}, \text{ onde } 0 \leq {}^tF_{LLS} \leq {}^tF_{YLLS} \quad (3.108)$$

$${}^tF_{RLS} = {}^t\kappa_{RLS} {}^t\Delta_{RLS}, \text{ onde } 0 \leq {}^tF_{RLS} \leq {}^tF_{YRLS} \quad (3.109)$$

As forças de escoamento à compressão para as molas de base, superior, lateral esquerda e lateral direita são representadas por ${}^tF_{YBS}$, ${}^tF_{YUS}$, ${}^tF_{YLLS}$, e ${}^tF_{YRLS}$, respectivamente. Para a mola axial, a força incremental definida no sistema de coordenadas local na configuração deformada corrente é dada pela Equação (3.110). Nesta equação, $-{}^tF_{YAS}$ e ${}^tF_{YAS}$ são forças de escoamento à tração e compressão, respectivamente.

$${}^tF_{AS} = {}^t\kappa_{AS} {}^t\Delta_{AS}, \text{ onde } -{}^tF_{YAS} \leq {}^tF_{AS} \leq {}^tF_{YAS} \quad (3.110)$$

As forças apresentadas são as componentes do vetor \mathbf{F}_{KS} , o qual é apresentado pela Equação (3.111).

$${}^t\mathbf{F}_{KS}^T = \left\{ {}^tF_{AS} \quad {}^tF_{US} + {}^tF_{BS} \quad {}^tF_{LLS} + {}^tF_{RLS} \right\} \quad (3.111)$$

3.10 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO

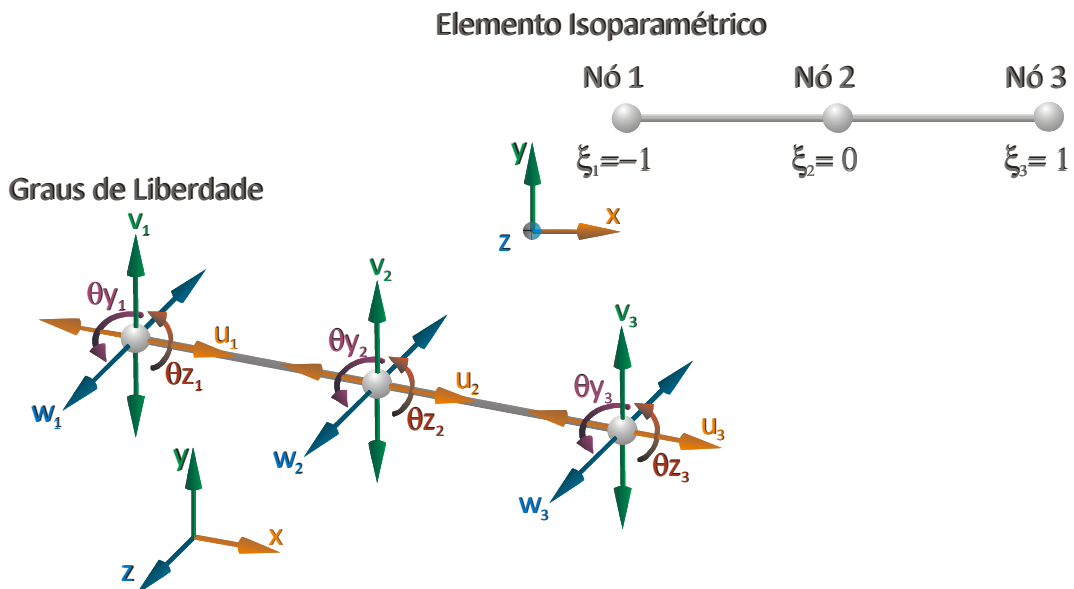
A seguir é apresentada a formulação do elemento finito utilizado neste trabalho. Esta formulação toma como base toda a teoria apresentada nas seções anteriores deste capítulo. Souza (2005) apresentou o desenvolvimento detalhado dessa formulação. Porém, como neste trabalho o intuito é o de utilizar essa formulação, esta será apresentada de forma mais direta.

Nas seções a seguir será apresentada a formulação do vetor de deslocamentos nodais. Na sequência são apresentadas as formulações das matrizes de deformação-deslocamento e da matriz de rotação. Ao final, introduzem-se as equações de equilíbrio de elemento finito.

3.10.1 Vetor de Deslocamentos Nodais

O elemento finito utilizado neste trabalho é um elemento uniaxial, que suporta tração, compressão e flexão. Este elemento possui três nós e cinco graus de liberdade por nó. Para o deslocamento axial são utilizados lagrangeanos de segunda ordem. Os demais graus de liberdade são discretizados por lagrangeanos de quinta ordem. Assim sendo, os graus de liberdade para o elemento utilizado são ${}^t u_1, {}^t v_1, {}^t w_1, {}^t \theta_{z1}, {}^t \theta_{y1}, {}^t u_2, {}^t v_2, {}^t w_2, {}^t \theta_{z2}, {}^t \theta_{y2}, {}^t u_3, {}^t v_3, {}^t w_3, {}^t \theta_{z3}$, e ${}^t \theta_{y3}$. Aqui, os subscritos denotam o nó. Logo, uma malha com N segmentos possui $10 N + 5$ graus de liberdade. A Figura (3.10) apresenta um esquema do elemento e a Equação (3.112) apresenta o vetor de deslocamentos nodais.

FIGURA 3.10 – ELEMENTO FINITO



$${}^t\mathbf{u}_e^T = \{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_{z_1} \quad \theta_{y_1} \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \theta_{z_2} \quad \theta_{y_2} \quad u_3 \quad v_3 \quad w_3 \quad \theta_{z_3} \quad \theta_{y_3}\} \quad (3.112)$$

As componentes do vetor de deslocamentos nodais são interpoladas pelas seguintes equações:

$${}^tu({}^0\xi) = \sum_{i=1}^3 {}^tu_i h({}^0\xi)_{(5i-4)} \quad (3.113)$$

$${}^tv({}^0\xi) = \sum_{i=1}^3 {}^tv_i h({}^0\xi)_{(5i-3)} + \sum_{i=1}^3 {}^t\theta_{z_i} h({}^0\xi)_{(5i-1)} \quad (3.114)$$

$${}^tw({}^0\xi) = \sum_{i=1}^3 {}^tw_i h({}^0\xi)_{(5i-2)} + \sum_{i=1}^3 {}^t\theta_{y_i} h({}^0\xi)_{(5i)} \quad (3.115)$$

A Equação (3.116) representa o vetor de deslocamentos nodais na forma matricial. A matriz das funções de interpolação é apresentada pela Equação (3.117).

$$\begin{Bmatrix} {}^tu \\ {}^tv \\ {}^tw \end{Bmatrix} = {}^t_0\mathbf{H}^t \mathbf{u}_e \quad (3.116)$$

$${}^t_0\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} {}^t_0h_1 & 0 & 0 \\ 0 & {}^t_0h_2 & 0 \\ 0 & 0 & {}^t_0h_3 \\ 0 & {}^t_0h_4 & 0 \\ 0 & 0 & {}^t_0h_5 \\ {}^t_0h_6 & 0 & 0 \\ 0 & {}^t_0h_7 & 0 \\ 0 & 0 & {}^t_0h_8 \\ 0 & {}^t_0h_9 & 0 \\ 0 & 0 & {}^t_0h_{10} \\ {}^t_0h_{11} & 0 & 0 \\ 0 & {}^t_0h_{12} & 0 \\ 0 & 0 & {}^t_0h_{13} \\ 0 & {}^t_0h_{14} & 0 \\ 0 & 0 & {}^t_0h_{15} \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

As funções de interpolação são as listadas nas Equações (3.118) a (3.126).

$$h({}^0\xi)_1 = \frac{{}^0\xi^2}{2} - \frac{{}^0\xi}{2} \quad (3.118)$$

$$h({}^0\xi)_2 = h({}^0\xi)_3 = {}^0\xi^2 - \frac{5}{4}{}^0\xi^3 - \frac{1}{2}{}^0\xi^4 + \frac{3}{4}{}^0\xi^5 \quad (3.119)$$

$$h({}^0\xi)_4 = h({}^0\xi)_5 = \frac{1}{8}L({}^0\xi^2 - {}^0\xi^3 - {}^0\xi^4 + {}^0\xi^5) \quad (3.120)$$

$$h({}^0\xi)_6 = 1 - {}^0\xi^2 \quad (3.121)$$

$$h({}^0\xi)_7 = h({}^0\xi)_8 = 1 - 2{}^0\xi^2 + {}^0\xi^4 \quad (3.122)$$

$$h({}^0\xi)_9 = h({}^0\xi)_{10} = \frac{{}^0L}{2}{}^0\xi - {}^0L{}^0\xi^3 + \frac{{}^0L}{2}{}^0\xi^5 \quad (3.123)$$

$$h({}^0\xi)_{11} = \frac{{}^0\xi^2}{2} + \frac{{}^0\xi}{2} \quad (3.124)$$

$$h({}^0\xi)_{12} = h({}^0\xi)_{13} = {}^0\xi^2 + \frac{5}{4}{}^0\xi^3 - \frac{1}{2}{}^0\xi^4 - \frac{3}{4}{}^0\xi^5 \quad (3.125)$$

$$h({}^0\xi)_{14} = h({}^0\xi)_{15} = \frac{1}{8}L(-{}^0\xi^2 - {}^0\xi^3 + {}^0\xi^4 + {}^0\xi^5) \quad (3.126)$$

3.10.2 Matrizes Deformação–Deslocamento

As deformações do duto estão relacionadas aos deslocamentos nodais e às derivadas das funções de forma conforme a Equação (3.127) para a deformação axial linear incremental ${}^t\varepsilon_0^L$ e para as curvaturas lineares incrementais ${}^t\phi_z^L$ e ${}^t\phi_y^L$.

$${}^t\Delta_d = {}^t_0\mathbf{B}^L {}^t\mathbf{u}_e \quad (3.127)$$

Sendo

$${}^t\Delta_d^T = \left\{ {}^t_0\varepsilon_0^L \quad {}^t_0\phi_z^L \quad {}^t_0\phi_y^L \right\} \quad (3.128)$$

e

$${}^t_0\mathbf{B}^{\mathbf{L}\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} {}^th_{1,x} & 0 & 0 \\ 0 & {}^th_{2,xx} & 0 \\ 0 & 0 & {}^th_{3,xx} \\ 0 & {}^th_{4,xx} & 0 \\ 0 & 0 & {}^th_{5,xx} \\ {}^th_{6,x} & 0 & 0 \\ 0 & {}^th_{7,xx} & 0 \\ 0 & 0 & {}^th_{8,xx} \\ 0 & {}^th_{9,xx} & 0 \\ 0 & 0 & {}^th_{10,xx} \\ {}^th_{11,x} & 0 & 0 \\ 0 & {}^th_{12,xx} & 0 \\ 0 & 0 & {}^th_{13,xx} \\ 0 & {}^th_{14,xx} & 0 \\ 0 & 0 & {}^th_{15,xx} \end{bmatrix} \quad (3.129)$$

As Equações (3.130) a (3.132) fornecem a relação entre os deslocamentos nodais e a deformação axial não-linear incremental ${}^t\mathcal{E}_0^{NL}$ e entre os deslocamentos nodais e as curvaturas não-lineares incrementais ${}^t\phi_z^{NL}$ e ${}^t\phi_y^{NL}$.

$${}^t\mathcal{E}_0^{NL} = \frac{1}{2} {}^t\mathbf{u}_e^{\mathbf{T}} {}^t_0\mathbf{B}_1^{\mathbf{NL}\mathbf{T}} {}^t_0\mathbf{B}_1^{\mathbf{NL}} {}^t\mathbf{u}_e \quad (3.130)$$

$${}^t\phi_z^{NL} = \frac{1}{2} {}^t\Delta_{\mathbf{d}}^{\mathbf{T}} {}^t_0\mathbf{B}_2^{\mathbf{NL}} {}^t\mathbf{u}_e \quad (3.131)$$

$${}^t\phi_y^{NL} = \frac{1}{2} {}^t\Delta_{\mathbf{d}}^{\mathbf{T}} {}^t_0\mathbf{B}_3^{\mathbf{NL}} {}^t\mathbf{u}_e \quad (3.132)$$

Sendo

$${}^t_0\mathbf{B}_1^{\text{NL}^T} = \begin{bmatrix} {}^th_{1,x} & 0 & 0 \\ 0 & {}^th_{2,x} & 0 \\ 0 & 0 & {}^th_{3,x} \\ 0 & {}^th_{4,x} & 0 \\ 0 & 0 & {}^th_{5,x} \\ {}^th_{6,x} & 0 & 0 \\ 0 & {}^th_{7,x} & 0 \\ 0 & 0 & {}^th_{8,x} \\ 0 & {}^th_{9,x} & 0 \\ 0 & 0 & {}^th_{10,x} \\ {}^th_{11,x} & 0 & 0 \\ 0 & {}^th_{12,x} & 0 \\ 0 & 0 & {}^th_{13,x} \\ 0 & {}^th_{14,x} & 0 \\ 0 & 0 & {}^th_{15,x} \end{bmatrix}, {}^t_0\mathbf{B}_2^{\text{NL}^T} = \begin{bmatrix} 0 & {}^th_{1,x} & 0 \\ {}^th_{2,xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ {}^th_{4,xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^th_{6,x} & 0 \\ {}^th_{7,xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ {}^th_{9,xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^th_{11,x} & 0 \\ {}^th_{12,xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ {}^th_{14,xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } {}^t_0\mathbf{B}_3^{\text{NL}^T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & {}^th_{1,x} \\ 0 & 0 & 0 \\ {}^th_{3,xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ {}^th_{5,xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^th_{6,x} \\ 0 & 0 & 0 \\ {}^th_{8,xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ {}^th_{10,xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^th_{11,x} \\ 0 & 0 & 0 \\ {}^th_{13,xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ {}^th_{15,xx} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.133)$$

A relação das deformações do solo com os deslocamentos nodais e com as derivadas das funções de forma é dada pela Equação (3.134).

$${}^t\Delta_s = {}^t\mathbf{B}^s {}^t\mathbf{u}_e \quad (3.134)$$

Sendo

$${}^t\Delta_s^T = \left\{ {}^t_0\Delta_{AS} \quad {}^t_0\Delta_{BS} \quad {}^t_0\Delta_{US} \quad {}^t_0\Delta_{LLS} \quad {}^t_0\Delta_{RLS} \right\} \quad (3.135)$$

Na Equação (3.138) os parâmetros η e β são definidos de acordo com os deslocamentos transversais conforme as Equações (3.136) e (3.147).

$$\eta = \begin{cases} 0 & \text{se } {}^tv < 0 \\ 1 & \text{se } {}^tv > 0 \end{cases} \quad (3.136)$$

$$\beta = \begin{cases} 0 & \text{se } {}^tw < 0 \\ 1 & \text{se } {}^tw > 0 \end{cases} \quad (3.137)$$

$${}^t_0\mathbf{B}^{\text{ST}} = \begin{bmatrix} -{}^t_0h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -{}^t_0h_2(1-\eta) & 0 & -{}^t_0h_2\eta & 0 \\ 0 & 0 & -{}^t_0h_3(1-\beta) & 0 & -{}^t_0h_3\eta \\ 0 & -{}^t_0h_4(1-\eta) & 0 & -{}^t_0h_4\eta & 0 \\ 0 & 0 & -{}^t_0h_5(1-\beta) & 0 & -{}^t_0h_5\eta \\ -{}^t_0h_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -{}^t_0h_7(1-\eta) & 0 & -{}^t_0h_7\eta & 0 \\ 0 & 0 & -{}^t_0h_8(1-\beta) & 0 & -{}^t_0h_8\eta \\ 0 & -{}^t_0h_9(1-\eta) & 0 & -{}^t_0h_9\eta & 0 \\ 0 & 0 & -{}^t_0h_{10}(1-\beta) & 0 & -{}^t_0h_{10}\eta \\ -{}^t_0h_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -{}^t_0h_{12}(1-\eta) & 0 & -{}^t_0h_{12}\eta & 0 \\ 0 & 0 & -{}^t_0h_{13}(1-\beta) & 0 & -{}^t_0h_{13}\eta \\ 0 & -{}^t_0h_{14}(1-\eta) & 0 & -{}^t_0h_{14}\eta & 0 \\ 0 & 0 & -{}^t_0h_{15}(1-\beta) & 0 & -{}^t_0h_{15}\eta \end{bmatrix} \quad (3.138)$$

3.10.3 Matriz de Rotação

A relação entre os deslocamentos nodais no sistema de coordenadas locais (\mathbf{u}_e) e os deslocamentos no sistema de coordenadas globais ($\tilde{\mathbf{u}}_e$) é dada pela Equação (3.139).

$${}^t_0\mathbf{u}_e = {}^t\mathbf{R}_{\text{T}0} {}^t\tilde{\mathbf{u}}_e \quad (3.139)$$

Na análise não-linear geométrica a matriz de rotação (\mathbf{R}_{T}) possui um papel importante devido à necessidade de atualização constante da geometria. Essa matriz é definida pela Equação (3.140).

$${}^t\mathbf{R}_{\text{T}} = \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{ROT} & 0 & 0 \\ 0 & {}^t\mathbf{ROT} & 0 \\ 0 & 0 & {}^t\mathbf{ROT} \end{bmatrix} \quad (3.140)$$

Sendo

$${}^t\mathbf{ROT} = \begin{bmatrix} {}^tC_1 {}^tC_2 & {}^tS_1 {}^tC_2 & {}^tS_2 & 0 & 0 \\ -{}^tC_1 {}^tS_2 {}^tS_3 - {}^tS_1 {}^tC_3 & {}^tC_1 {}^tC_3 - {}^tS_1 {}^tS_2 {}^tS_3 & {}^tC_2 {}^tS_3 & 0 & 0 \\ -{}^tC_1 {}^tS_2 {}^tC_3 - {}^tS_1 {}^tS_3 & -{}^tC_1 {}^tS_3 - {}^tS_1 {}^tS_2 {}^tC_3 & {}^tC_2 {}^tC_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^tC_2 {}^tC_3 & -{}^tC_1 {}^tS_3 - {}^tS_1 {}^tS_2 {}^tC_3 \\ 0 & 0 & 0 & {}^tS_3 {}^tC_2 & {}^tC_1 {}^tC_3 - {}^tS_1 {}^tS_2 {}^tS_3 \end{bmatrix} \quad (3.141)$$

Onde

$${}^tC_1 = \begin{cases} \frac{{}^t x_1^j - {}^t x_1^i}{{}^t L_{xy}} & \text{se } {}^t L_{xy} > 0.0001 {}^t L \\ 1 & \text{se } {}^t L_{xy} < 0.0001 {}^t L \end{cases}, \quad {}^tS_1 = \begin{cases} \frac{{}^t x_2^j - {}^t x_2^i}{{}^t L_{xy}} & \text{se } {}^t L_{xy} > 0.0001 {}^t L \\ 0 & \text{se } {}^t L_{xy} < 0.0001 {}^t L \end{cases} \quad (3.142)$$

$${}^tC_2 = \frac{{}^t L_{xy}}{{}^t L}, \quad {}^tS_2 = \frac{{}^t x_3^j - {}^t x_3^i}{{}^t L} \quad (3.143)$$

$${}^tC_3 = \cos({}^t \alpha), \quad {}^tS_3 = \sin({}^t \alpha) \quad (3.144)$$

$${}^t L = \sqrt{({}^t x_1^j - {}^t x_1^i)^2 + ({}^t x_2^j - {}^t x_2^i)^2 + ({}^t x_3^j - {}^t x_3^i)^2} \quad (3.145)$$

Nas Equações (3.142) a (3.145), acima, ${}^t L_{xy}$ é o comprimento da projeção do elemento no plano x_1 - x_2 e ${}^t x_k^i$ e ${}^t x_k^j$ são as coordenadas dos nós i e j do elemento, respectivamente. A matriz ${}^t\mathbf{ROT}$ é expressa em função dos co-senos diretores do membro, os quais são calculados a partir das coordenadas dos nós, e do ângulo ${}^t \alpha$, que deve ser fornecido como um parâmetro da geometria da estrutura.

3.10.4 Equações de Equilíbrio

Aplicando a formulação Lagrangeana Total na análise estática, as matrizes elementares de rigidez serão as listadas abaixo, onde a Equação (3.146) traz a matriz de rigidez elásto-plástica, a Equação (3.147) traz a matriz de rigidez geométrica (não-linear) e, por fim, a Equação (3.148) traz matriz de rigidez das molas de representação do solo.

$${}^t\mathbf{K}_{EP}^e = \int_{0L_e} {}^t\mathbf{B}^{\mathbf{L}\mathbf{T}} {}^t\mathbf{D}^{\mathbf{P}} {}^t\mathbf{B}^{\mathbf{L}} d^0x_1 \quad (3.146)$$

$${}^t\mathbf{K}_G^e = \int_{0L_e} \left({}^t\mathbf{B}_1^{\mathbf{NL}\mathbf{T}} {}^t\mathbf{F}_0 {}^t\mathbf{B}_1^{\mathbf{NL}} + {}^t\mathbf{B}^{\mathbf{L}\mathbf{T}} {}^t\mathbf{M}_{10} {}^t\mathbf{B}_2^{\mathbf{NL}} + {}^t\mathbf{B}^{\mathbf{L}\mathbf{T}} {}^t\mathbf{M}_{20} {}^t\mathbf{B}_3^{\mathbf{NL}} \right) d^0x_1 \quad (3.147)$$

$${}^t\mathbf{K}_S^e = \int_{0L_e} {}^t\mathbf{H}^{\mathbf{T}} {}^t\mathbf{D}^{\mathbf{S}} {}^t\mathbf{B}^{\mathbf{S}} d^0x_1 \quad (3.148)$$

Com a aplicação da matriz de rotação, a matriz de rigidez elementar final (${}^t\mathbf{K}^e$) será a apresentada pela Equação (3.149).

$${}^t\mathbf{K}^e = {}^t\mathbf{R}_T^{\mathbf{T}} \left({}^t\mathbf{K}_{EP}^e + {}^t\mathbf{K}_G^e + {}^t\mathbf{K}_S^e \right) {}^t\mathbf{R}_T \quad (3.149)$$

Os vetores de força equivalente nos pontos nodais do elemento são apresentados pela Equação (3.150) para o duto e pela Equação (3.151) para as molas de representação do solo.

$${}^t\mathbf{Q}_P^e = \int_{0L_e} {}^t\mathbf{B}^{\mathbf{L}\mathbf{T}} {}^t\mathbf{F}_{\text{int}} d^0x_1 \quad (3.150)$$

$${}^t\mathbf{Q}_S^e = \int_{0L_e} {}^t\mathbf{H}^{\mathbf{T}} {}^t\mathbf{F}_{\text{KS}} d^0x_1 \quad (3.151)$$

Com a inclusão do vetor de forças externas (${}^t\mathbf{P}^e$) e aplicando a matriz de rotação, o vetor de força elementar final (${}^t\mathbf{R}^e$) será o apresentado pela Equação (3.152).

$${}^t\mathbf{R}^e = {}^t\mathbf{R}_T^{\mathbf{T}} \left({}^t\mathbf{P}^e - {}^t\mathbf{Q}_P^e - {}^t\mathbf{Q}_S^e \right) \quad (3.152)$$

Após a devida montagem das matrizes globais, a equação de equilíbrio final, para o tempo t , toma a seguinte forma:

$${}^t\mathbf{K}_0 {}^t\mathbf{u} = {}^t\mathbf{R} \quad (3.153)$$

A Equação (3.153) é equação básica do método dos elementos finitos para a análise estática, onde ${}^t_0\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez global da estrutura no tempo t e ${}^t_0\mathbf{R}$ é o vetor de carga global da estrutura no tempo t . Com a utilização de uma técnica apropriada (como, por exemplo, o método de eliminação Gauss), aplicada à Equação (3.153), obtém-se o vetor de deslocamentos da estrutura (${}^t_0\mathbf{u}$).

4 FLAMBAGEM

Freitas (2006) define a flambagem como um fenômeno de instabilidade geométrica caracterizado pelos grandes deslocamentos que levam uma estrutura a passar repentinamente de uma configuração de equilíbrio instável para uma configuração de equilíbrio estável. Este fato torna a análise de flambagem um tópico da mecânica não-linear.

Neste capítulo apresentam-se alguns conceitos básicos sobre a flambagem. Na sequência são apresentados a teoria clássica de flambagem de colunas desenvolvida por Euler e o método analítico desenvolvido por Hobbs (1981) para análise da flambagem em dutos. Por fim, apresentam-se os métodos numéricos utilizados para obtenção da carga crítica de flambagem.

4.1 FLAMBAGEM DE DUTOS AQUECIDOS

Geralmente, o fenômeno de flambagem em dutos ocorre sob certas condições de contorno decorrentes do contato solo-duto e devido a um carregamento térmico produzido pelo deslocamento de um fluido em seu interior.

As condições para que ocorra flambagem em dutos aquecidos foram relacionadas por Freitas (2006). São elas:

- Duto reto;
- Duto submetido a um acréscimo de temperatura ΔT ;
- Deslocamento axial restrito, total ou parcialmente.

Por ser muito sensível a imperfeições geométricas iniciais, a existência de pequenas curvaturas iniciais, tanto no plano horizontal quanto no plano vertical, influenciarão no plano preferencial de flambagem.

Em um duto axialmente restringido (Fig. 4.1), o esforço axial devido ao acréscimo de temperatura é dado pela Equação (4.1).

$$P = EA\alpha\Delta T \quad (4.1)$$

Sendo:

P – força axial;

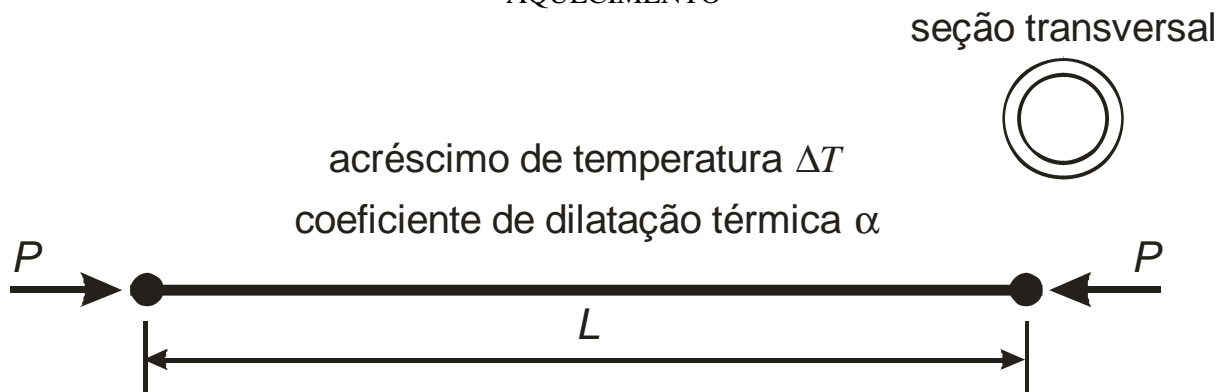
E – módulo de elasticidade longitudinal;

A – área da seção transversal;

α – coeficiente de dilatação térmica;

ΔT – acréscimo de temperatura acima da temperatura de montagem.

FIGURA 4.1 – DESENHO ESQUEMÁTICO DA ATUAÇÃO DA FORÇA NORMAL DEVIDO AO AQUECIMENTO



Fonte: Freitas (2006).

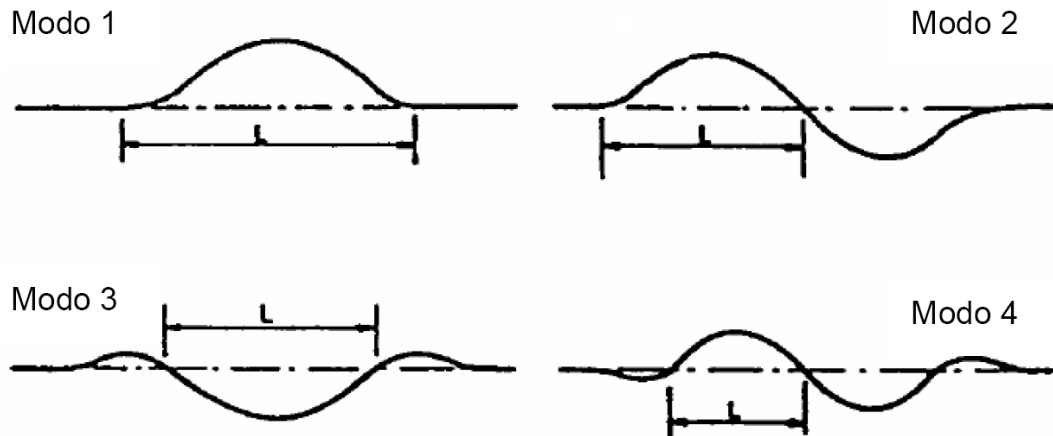
4.2 MODOS DE FLAMBAGEM

Para que a flambagem ocorra, é necessário que a força axial P seja igual ou superior o esforço crítico de flambagem P_{cr} . Dependendo das condições de contorno, o duto pode assumir diferentes configurações deformadas, que podem ser tanto verticais como laterais. Estas configurações deformadas denominam-se modos de flambagem.

Tanto os modos de flambagem vertical quanto os modos de flambagem lateral possíveis de ocorrer podem ser constituídos por uma ou mais meias ondas. Entretanto, na flambagem vertical, a fim de se reduzir a complexidade das equações dos métodos

analíticos, geralmente considera-se apenas o primeiro modo. A Figura 4.2 mostra os quatro primeiros modos de flambagem que podem ser assumidos em um trecho de um duto.

FIGURA 4.2 – MODOS DE FLAMBAGEM QUE UM DUTO PODE ASSUMIR



Fonte: Hobbs (1981).

Segundo Freitas (2006), os modos de flambagem localizados são típicos de dutos aquecidos. Ainda segundo esse autor, é comum que em um duto aquecido, com vários quilômetros de extensão, ocorra flambagem em um ou mais trechos menores, ao invés de ocorrer flambagem segundo um modo periódico, com meias ondas ao longo de toda sua extensão.

4.3 FLAMBAGEM DE DUTOS PARCIALMENTE E TOTALMENTE ENTERRADOS

Geralmente, dutos totalmente enterrados flambam verticalmente uma vez que a contenção lateral exercida pelo solo é muito grande neste caso. O peso próprio do duto e o peso da camada de solo que sobre ele são os únicos esforços que tendem a conter a flambagem vertical.

Em dutos parcialmente enterrados, pode-se ocorrer tanto a flambagem lateral quanto a flambagem vertical. Enquanto a ação do peso próprio do duto tenta conter a

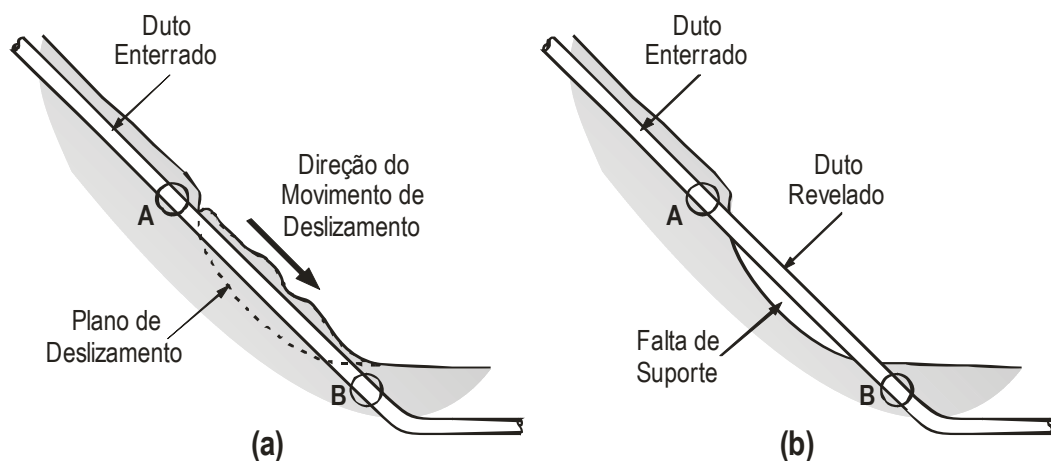
flambagem vertical, a reação lateral do solo tenta conter a flambagem lateral. A flambagem ocorrerá no plano de menor contenção.

De acordo com Freitas (2006), para valores de penetração do duto no solo iguais ou superiores a meio diâmetro, é mais provável que a flambagem ocorra no plano vertical. Já a flambagem lateral depende de outros fatores, como: duto parcialmente enterrado, duto reto, duto submetido a um acréscimo de temperatura, deslocamento axial parcialmente ou totalmente restringido e flambagem vertical impedida pela ação do peso próprio.

4.4 TEORIA CLÁSSICA DE FLAMBAGEM DE COLUNAS

Geralmente, um duto está parcialmente ou totalmente enterrado. Porém, em tubulações sujeitas a deslizamentos de terra (por exemplo, dutos em encostas) podem ocorrer situações em que um trecho do duto apresente condições de contorno típicas de colunas, conforme apresentado pela Figura 4.3b.

FIGURA 4.3 – TUBULAÇÃO SUJEITA A DESLIZAMENTOS DE TERRA



A teoria clássica de flambagem de colunas apresentada por Beer e Johnston Jr. (1995) apresenta o desenvolvimento para obtenção da fórmula de Euler para colunas com ambas as extremidades articuladas (Eq. 4.2). Esta equação fornece o valor crítico

da força axial P , ou seja, o valor P_{cr} para o qual a situação na Figura 4.4a deixa de ser estável (Fig. 4.4b).

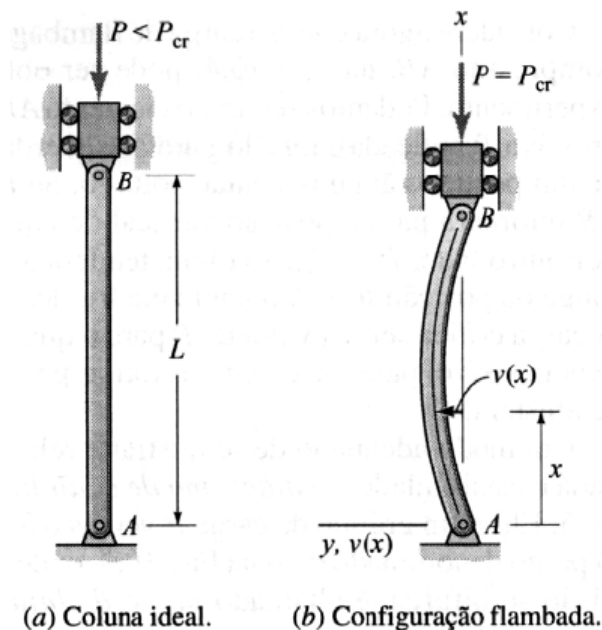
$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{L^2} \quad (4.2)$$

Sendo:

P_{cr} – força axial crítica;
 E – módulo de elasticidade longitudinal;
 I – momento de inércia;
 L – comprimento da coluna.

A fórmula de Euler praticamente se mantém para colunas com condições de contorno diferentes da apresentada acima. A única diferença é a substituição do comprimento L da coluna por um comprimento efetivo de flambagem L_f , conforme apresentado pela Equação (4.3).

FIGURA 4.4 – COLUNA EM EQUILÍBRIO INSTÁVEL

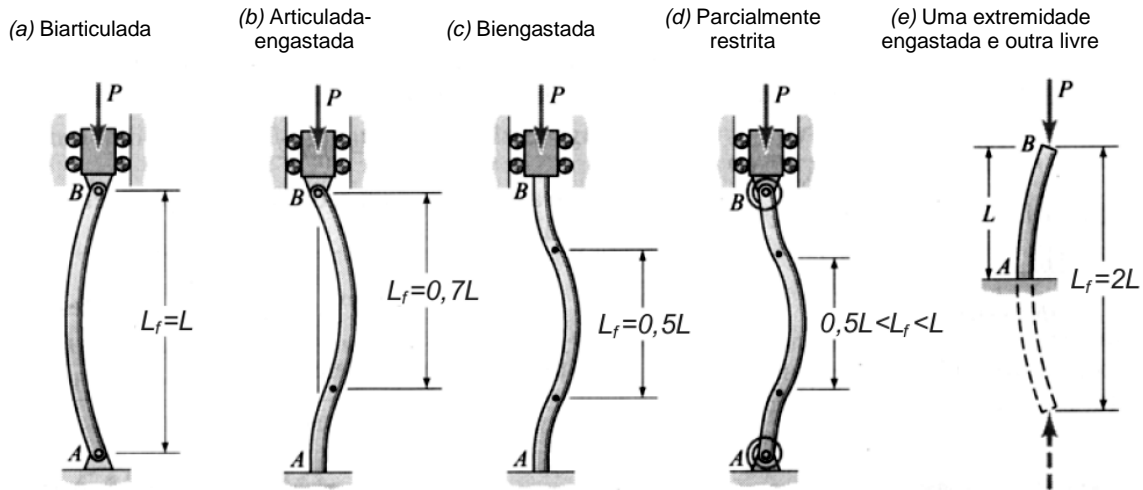


Fonte: Beer, Johnston Jr. (1995).

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{L_f^2} \quad (4.3)$$

Os valores de L_f , para as condições de contorno mais comuns encontradas em colunas, são apresentados pela Figura 4.5.

FIGURA 4.5 – COMPRIMENTO EFETIVO DE FLAMBAGEM PARA DIFERENTES CONDIÇÕES DE CONTORNO



Fonte: Beer, Johnston Jr. (1995).

4.5 MÉTODO ANALÍTICO DE HOBBS PARA ANÁLISE DE FLAMBAGEM EM DUTOS

Hobbs (1981, 1984), baseado nos estudos de Kerr (1978) para trilhos de trem, desenvolveu um modelo analítico para análise da flambagem de dutos. Este modelo possui equações aplicáveis tanto ao plano vertical quanto ao plano lateral de flambagem.

A seguir são apresentadas as formulações desenvolvidas por Hobbs (1981) para flambagem no plano vertical e para flambagem no plano horizontal. Outros métodos analíticos de igual importância, como o de Pedersen e Jensen (1988), poderiam ter sido abordados, porém optou-se pela utilização do método de Hobbs por este ser o mais comum dentre os trabalhos pesquisados.

4.5.1 Flambagem no Plano Vertical

Para a hipótese de flambagem vertical, Hobbs (1981, 1984) supõe que o duto encontra-se simplesmente apoiado sobre um solo rígido, reagindo aos deslocamentos do duto com uma força de atrito de Mohr-Coulomb, expressa pela Equação (4.4). A Figura 4.6 apresenta alguns detalhes da flambagem vertical de dutos.

$$f_a = \phi w \quad (4.4)$$

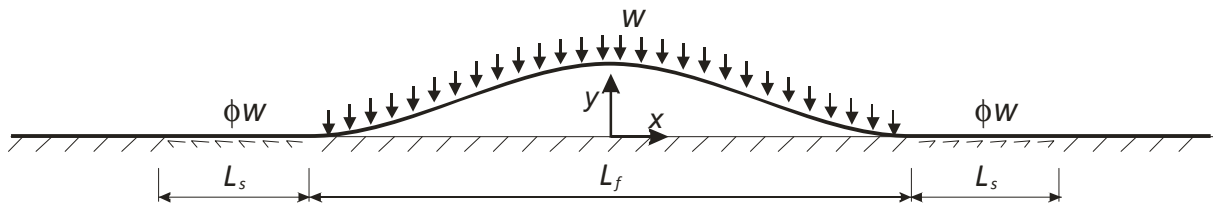
Onde:

f_a – força de atrito de Mohr-Coulomb;

ϕ – coeficiente de atrito entre o solo e o duto;

w – peso submerso do duto.

FIGURA 4.6 – DETALHES DA FLAMBAGEM VERTICAL



Fonte: Hobbs (1981)

Conforme colocado anteriormente, em hipóteses de flambagem no plano vertical é comum considerar-se apenas o primeiro modo de flambagem. Para se obter as equações para a flambagem vertical de dutos, considerado perfeitamente retilíneo em sua configuração inicial, deve-se resolver a equação diferencial de equilíbrio (4.5) com as condições de contorno dadas pelas equações (4.6) a (4.9) (KERR, 1978).

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} + w = 0 \quad (4.5)$$

$$y(0) = y_{\max} \quad (4.6)$$

$$y\left(\pm \frac{L_f}{2}\right) = 0 \quad (4.7)$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\pm \frac{L_f}{2}\right) = 0 \quad (4.8)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left(\pm \frac{L_f}{2}\right) = 0 \quad (4.9)$$

Após uma série de manipulações algébricas, demonstradas por Cardoso (2005), as expressões para obtenção da crítica de flambagem são as apresentadas pelas Equações (4.10) e (4.11).

$$P = 80.76 \frac{EI}{L_f^2} \quad (4.10)$$

$$P_{cr} = P + \frac{wL_f}{EI} \sqrt{1.597 \times 10^{-5} Eaf_a L_f^5 - \frac{1}{4} (\phi EI)^2} \quad (4.11)$$

As Equações (4.12) a (4.14) fornecem a amplitude máxima da flambagem, o máximo momento fletor, em $x = 0$, e a inclinação máxima, respectivamente.

$$\hat{y} = 2.408 \times 10^{-3} \frac{wL_f^4}{EI} \quad (4.12)$$

$$\hat{M} = 0.06938 wL_f^2 \quad (4.13)$$

$$\hat{y}' = 8.657 \times 10^{-3} \frac{wL_f^3}{EI} \quad (4.14)$$

Sendo:

- \hat{y} – amplitude máxima de flambagem;
- \hat{M} – máximo momento fletor, em $x = 0$;
- \hat{y}' – inclinação máxima.

O comprimento do trecho reto não ancorado adjacente ao trecho fletido da configuração pós-flambagem do duto (L_s) é dado pela Equação (4.15).

$$L_s = \frac{P_{cr} - P}{f_a} - \frac{1}{2} L_f \quad (4.15)$$

4.5.2 Flambagem no Plano Lateral

De forma semelhante, para a hipótese de flambagem lateral, Hobbs (1981, 1984) supõe que o coeficiente de atrito entre o solo e o duto é igual tanto axialmente quanto transversalmente. Ou seja, a formulação proposta por Hobbs considera as reações do solo aos deslocamentos axial e lateral do duto, R_{axi} e R_{lat} respectivamente, iguais entre si.

Em 2001, Benjamin e Andrade propuseram uma versão modificada do método analítico de Hobbs. Neste método modificado as reações do solo aos deslocamentos axial e lateral do duto são fornecidos como dados do problema e podem assumir valores diferentes entre si. As reações R_{axi} e R_{lat} podem ser determinadas por meio de equações empíricas ou de análises numéricas permitindo representar de forma mais realista as situações encontradas em campo, uma vez que é possível levar em consideração o tipo de solo e o grau de penetração do duto no solo. Isto posto, apresenta-se aqui a versão modificada do método analítico Hobbs apresentada por Benjamin e Andrade (2001).

Em sua adaptação, Benjamin e Andrade (2001) adotaram as seguintes hipóteses:

- Penetração uniforme do duto ao longo de toda a sua extensão;
- Solo rígido plástico;
- Material do duto elástico;
- Duto livre de imperfeição geométrica inicial (eixo perfeitamente linear);
- Configuração pré-flambagem livre de tensões de flexão;

- Seção transversal do duto livre de ovalização;
- Duto livre de perdas de espessura causadas por corrosão;
- Duto livre de mossas, sulcos, cavas e trincas;
- Equilíbrio realizado na configuração pós-flambagem;
- Ancoragem do duto na direção axial feita pela interação solo-duto;
- Interação solo-duto desprezada na direção axial no trecho fletido.

Assim como Kerr (1978), Hobbs (1981, 1984) e Benjamin e Andrade (2001) estudaram quatro configurações de flambagem lateral, conforme já apresentado pela Figura 4.2. Nas expressões apresentadas a seguir, são utilizadas cinco constantes diferentes (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) que dependem do modo de flambagem assumido pelo duto. Os valores destas constantes são apresentados pela Tabela 4.1.

TABELA 4.1 – CONSTANTES CORRESPONDENTES AOS QUATRO MODOS DE FLAMBAGEM

Modo	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
1	80.76	6.391×10^{-5}	0.5	2.407×10^{-3}	1.0
2	39.48	17.430×10^{-5}	1.0	5.532×10^{-3}	2.0
3	34.06	16.680×10^{-5}	1.294	10.320×10^{-3}	2.587
4	28.20	21.440×10^{-5}	1.608	10.470×10^{-3}	3.216

Fonte: Benjamin e Andrade (2001).

A obtenção da crítica de flambagem no plano lateral se dá através das Equações (4.16) e (4.17).

$$P = k_1 \frac{EI}{L_f^2} \quad (4.16)$$

$$P_{cr} = P + k_3 R_{axi} L_f \left[\sqrt{1.0 + k_2 \frac{EA}{R_{axi}} \frac{R_{lat}^2}{(EI)^2} L_f^5} - 1.0 \right] \quad (4.17)$$

Onde:

k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 – Constantes dos modos de flambagem;

R_{axi} – Reação do solo ao deslocamento axial do duto;

R_{lat} – Reação do solo ao deslocamento lateral do duto.

A Equação (4.18) fornece a amplitude máxima de flambagem. Já a Equação (4.19) fornece o comprimento do trecho reto não ancorado adjacente ao trecho fletido da configuração pós-flambagem do duto (L_s).

$$\hat{y} = k_4 \frac{R_{lat} L_f^4}{EI} \quad (4.18)$$

$$L_s = \frac{P_{cr} - P}{R_{axi}} \quad (4.19)$$

A soma do comprimento do trecho fletido com o comprimento dos dois trechos retos não ancorados adjacentes ao trecho fletido pode ser obtida através da Equação (4.20).

$$L_{total} = k_5 L_f + 2L_s \quad (4.20)$$

4.6 ANÁLISE NUMÉRICA DA CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM

Em análises numéricas, a carga crítica de flambagem pode ser obtida tanto através de uma análise não-linear incremental quanto através de um cálculo linearizado. Nas seções a subseqüentes, estes dois métodos são apresentados.

4.6.1 Análise Não-Linear Incremental

De acordo com Bathe (1996), o objetivo de uma análise não-linear é, em muitos casos, o de estimar a carga máxima que uma estrutura pode suportar até a instabilidade ou o colapso.

Geralmente, quando se faz uso dessa técnica para obtenção da carga crítica de flambagem, em algum ponto durante a execução do processo os resultados passarão a ser divergentes ou não condizentes com a realidade.

Quando da implantação do elemento finito descrito no Capítulo 3, foram consideradas três situações para que a solução não-linear incremental parasse de ser executada e retorna-se o carregamento crítico:

- Matriz de rigidez não positiva definida;
- Deslocamentos não condizentes com a realidade;
- Limite máximo de iterações atingido.

Uma vantagem da análise não-linear incremental frente ao cálculo linearizado é a possibilidade de se avaliar a influência da não-linearidade material na carga crítica de flambagem.

4.6.2 Cálculo Linearizado da Carga de Flambagem

Como a solução não-linear incremental completa de uma estrutura até o ponto de instabilidade ou de colapso pode ser muito cara computacionalmente, uma técnica, conhecida como cálculo linearizado da carga de flambagem, pode ser considerada. Esta técnica, cuja formulação apresentada aqui foi baseada em Bathe (1996), consiste na obtenção da carga crítica de flambagem através da solução de um problema generalizado de autovalores e autovetores (ver Apêndice B). Nessa formulação as matrizes de rigidez nos tempos $t - \Delta t$ e t são dadas por ${}^{t-\Delta t}\mathbf{K}$ e por ${}^t\mathbf{K}$, respectivamente, e os corres-

pondentes vetores de carregamentos externos são ${}^{t-\Delta t}\mathbf{R}$ e ${}^t\mathbf{R}$. No cálculo linearizado da carga de flambagem assume-se que em qualquer tempo τ as Equações (4.21) e (4.22) sejam satisfeitas. Nestas equações, ω é um fator de escala e apenas os valores superiores a 1 interessam.

$${}^\tau\mathbf{K} = {}^{t-\Delta t}\mathbf{K} + \omega({}^t\mathbf{K} - {}^{t-\Delta t}\mathbf{K}) \quad (4.21)$$

$${}^\tau\mathbf{R} = {}^{t-\Delta t}\mathbf{R} + \omega({}^t\mathbf{R} - {}^{t-\Delta t}\mathbf{R}) \quad (4.22)$$

No momento da flambagem, a tangente da matriz de rigidez é singular, portanto a condição para o cálculo de ω é a dada pela Equação (4.23), a qual pode ser escrita de forma equivalente conforme a Equação (4.24), onde $\boldsymbol{\Psi}$ é um vetor não-nulo.

$$\det {}^\tau\mathbf{K} = 0 \quad (4.23)$$

$${}^\tau\mathbf{K}\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{0} \quad (4.24)$$

Com a substituição da Equação (4.24) em (4.21), obtém-se o problema de autovalores e autovetores dado pela Equação (4.25).

$${}^{t-\Delta t}\mathbf{K}\boldsymbol{\Psi} = \omega({}^{t-\Delta t}\mathbf{K} - {}^t\mathbf{K})\boldsymbol{\Psi} \quad (4.25)$$

Com a utilização da Equação (4.22), os autovalores ω_i , $i = 1, \dots, n$ fornecem as cargas de flambagem e os autovetores $\boldsymbol{\Psi}_i$ representam os correspondentes modos de flambagem. Assume-se que ambas as matrizes ${}^{t-\Delta t}\mathbf{K}$ e ${}^t\mathbf{K}$ são positivas definidas, porém, em geral, ${}^{t-\Delta t}\mathbf{K} - {}^t\mathbf{K}$ é indefinida. Assim sendo, o problema de autovalores e autovetores terá tanto soluções positivas quanto negativas. Como apenas os menores valores positivos dos autovalores interessam, pode-se reescrever a Equação (4.25) conforme a Equação (4.26).

$${}^t\mathbf{K}\boldsymbol{\Psi} = \gamma {}^{t-\Delta t}\mathbf{K}\boldsymbol{\Psi} \quad (4.26)$$

Onde

$$\gamma = \frac{\omega - 1}{\omega} \quad (4.27)$$

Os autovalores γ_i da Equação (4.26) são todos positivos e, geralmente, apenas os menores valores $\gamma_1, \gamma_2, \dots$, são de interesse. Com a solução de γ_i pode-se obter ω_i a partir da Equação (4.27) e, então, a carga de flambagem para o modo i é dada pela Equação (4.28).

$$\mathbf{R}_{\text{flambagem}} = {}^{t-\Delta t} \mathbf{R} + \omega_i \left({}^t \mathbf{R} - {}^{t-\Delta t} \mathbf{R} \right) \quad (4.28)$$

Apesar do ganho computacional possível com a aplicação do cálculo linearizado para estimativa da carga crítica de flambagem, com este método não é possível considerar a influência da não-linearidade física nesta estimativa, inviabilizando sua aplicação em alguns casos.

5 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

A implantação da formulação do elemento finito, descrito no Capítulo 3 deste trabalho, se deu através do desenvolvimento de um programa utilizando a linguagem computacional Fortran. Este programa, denominado PANLEE (Programa para Análise Não-Linear de Estruturas Estáticas), utiliza o método modificado de Newton-Raphson para obtenção da solução não-linear e, para solução do problema generalizado de autovalores e autovetores, o método generalizado de Jacobi.

Nas seções a seguir são apresentadas quatro simulações numéricas que objetivam validar o elemento finito descrito no Capítulo 3 para a obtenção da carga crítica de flambagem.

O primeiro exemplo foi retirado do trabalho de Souza (2005). As soluções obtidas por este autor são discutidas e comparadas com as obtidas no programa PANLEE e no programa ANSYS.

No problema seguinte, as cargas críticas de flambagem obtidas com a teoria clássica de colunas são comparadas com as obtidas utilizando a análise não-linear incremental e utilizando o cálculo linearizado.

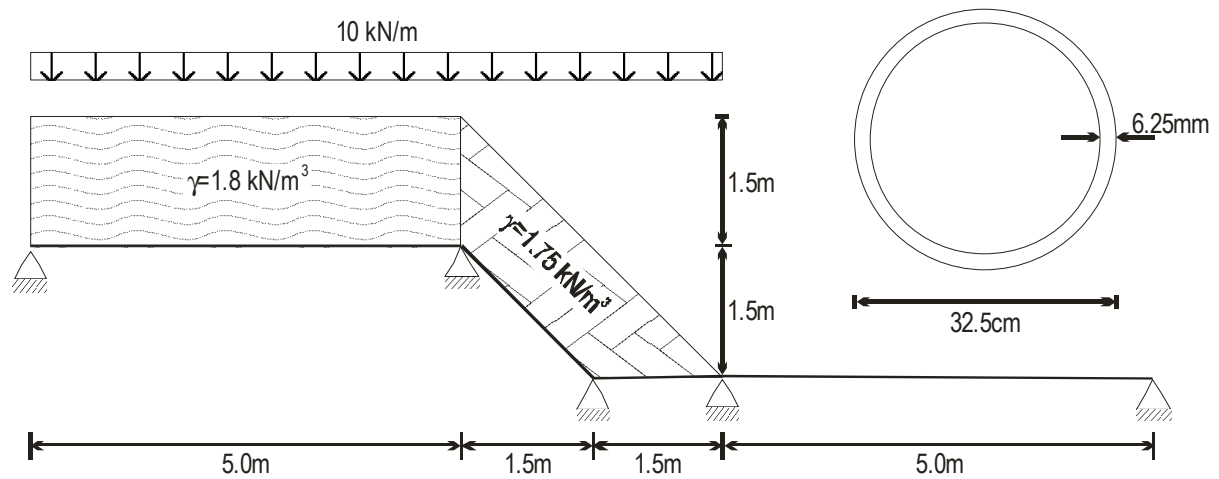
De forma semelhante ao segundo exemplo, o terceiro exemplo numérico compara os resultados da temperatura crítica de flambagem, para um duto apoiado sobre solo argiloso, obtidos analiticamente com o Método de Hobbs com os resultados obtidos com a análise não-linear incremental.

O último exemplo utiliza a análise não-linear incremental para comparar as cargas críticas de flambagem de uma tubulação enterrada em uma encosta sujeita a deslizamentos de terra. Para tanto, considera-se o trecho crítico do duto em três situações distintas: totalmente enterrado, parcialmente enterrado e totalmente desenterrado.

5.1 TUBULAÇÃO ENTERRADA EM ENCOSTA

Este exemplo simula o comportamento de uma tubulação levando em conta o carregamento distribuído devido ao solo além de um carregamento externo, conforme ilustrado pela Figura 5.1. O objetivo principal desta simulação é a comparação dos resultados obtidos com os apresentados por Souza (2005) para validar a implementação realizada. Os resultados obtidos com uma simulação utilizando o programa ANSYS, através do elemento BEAM44, também são apresentados para comparação.

FIGURA 5.1 – MODELO DO DUTO SIMULADO



Fonte: Souza (2005)

As propriedades materiais e geométricas utilizadas são dadas pelas Tabelas 5.1 e 5.2 e pela Figura 5.1. Estudou-se o comportamento do duto em duas análises distintas: linear elástica e não-linear físico-geométrica.

TABELA 5.1 – PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS

Propriedade	Unidade	Valor
I – Momento de Inércia	m^4	7.9516531×10^{-5}
A – Área da seção transversal	m^2	6.2586416×10^{-3}
D_e – Diâmetro externo do duto	cm	32.50
D_i – Diâmetro interno do duto	cm	31.25
t – Espessura da parede do Duto	mm	6.25

Fonte: Souza (2005).

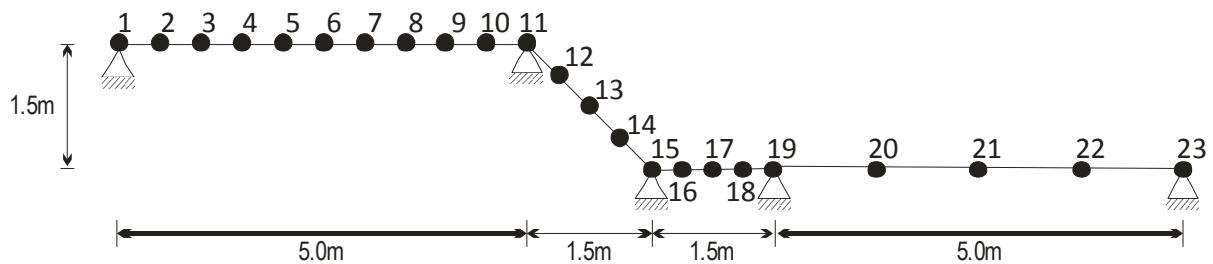
TABELA 7.2 – PROPRIEDADES MATERIAIS

Propriedade	Unidade	Valor
E – Módulo de Young	GPa	205.0
E_T – Módulo Tangente	GPa	75.0
S_y – Tensão de escoamento	MPa	420.0
ν – Coeficiente de Poisson	-	0.25

Fonte: Souza (2005).

O duto foi discretizado por 22 elementos tanto no trabalho apresentado por Souza (2005) quanto no ANSYS, enquanto que no presente trabalho utilizou-se somente 11 elementos. A Figura 5.2 ilustra a malha de elementos finitos aqui utilizada.

FIGURA 5.2 – MALHA DE ELEMENTOS FINITOS



O peso do solo sobre a tubulação foi determinado em função da profundidade do aterro, h , e do diâmetro externo, D_e , do duto, dados pela Figura 5.1, conforme apresentado pela Equação (5.1). Nesta equação q_{solo} é o peso do solo por unidade de comprimento e γ_s é o peso específico do solo.

$$q_{solo} = \gamma_s h D_e \quad (5.1)$$

Assim sendo, os carregamentos externos ao longo da tubulação são os dados pela Tabela 5.3. Além disso, uma pressão interna constante de 9 Mpa ao longo da tubulação também foi considerada.

TABELA 5.3 – CARREGAMENTOS EXTERNOS AO LONGO DA TUBULAÇÃO

x	γ_s (kN/m ³)	q_{solo} (N/m)	q (kN/m)	P_{int} (MPa)
0.0 a 5.0 m	1.80	877.500	10.0	9.0
5.0 a 6.5 m	1.75	853.125	10.0	9.0
6.5 a 8.0 m	1.75	2275 – 284.38x	10.0	9.0
8.0 a 13.0 m	1.75	0.0	0.0	9.0

Fonte: Souza (2005).

A interação solo-estrutura foi simulada por molas de base, superiores e axiais, cujos coeficientes de rigidez por unidade de comprimento são os seguintes: $\kappa_{AS} = 129.3405$ kN/m/m, $\kappa_{BS} = 1\,293.405$ kN/m/m e $\kappa_{US} = 970.0541$ kN/m/m.

No processo incremental iterativo foram utilizados 10 passos de carga e as forças internas foram determinadas através da divisão da seção transversal do duto em 50 faixas. A Tabela 5.4 traz a comparação dos valores nodais dos deslocamentos verticais e das rotações obtidos neste trabalho com a análise linear elástica com as apresentadas por Souza (2005) e com os obtidos na simulação executada com o programa ANSYS.

Os valores nodais dos deslocamentos axiais e verticais obtidos neste trabalho com a análise não-linear geométrica são confrontados com os apresentados por Souza (2005) e com os obtidos na simulação executada com o programa ANSYS na Tabela 5.5.

TABELA 5.4 – VALORES NODAIS DOS DESLOCAMENTOS VERTICAIS E DAS ROTAÇÕES OBTIDOS NA ANÁLISE LINEAR ELÁSTICA

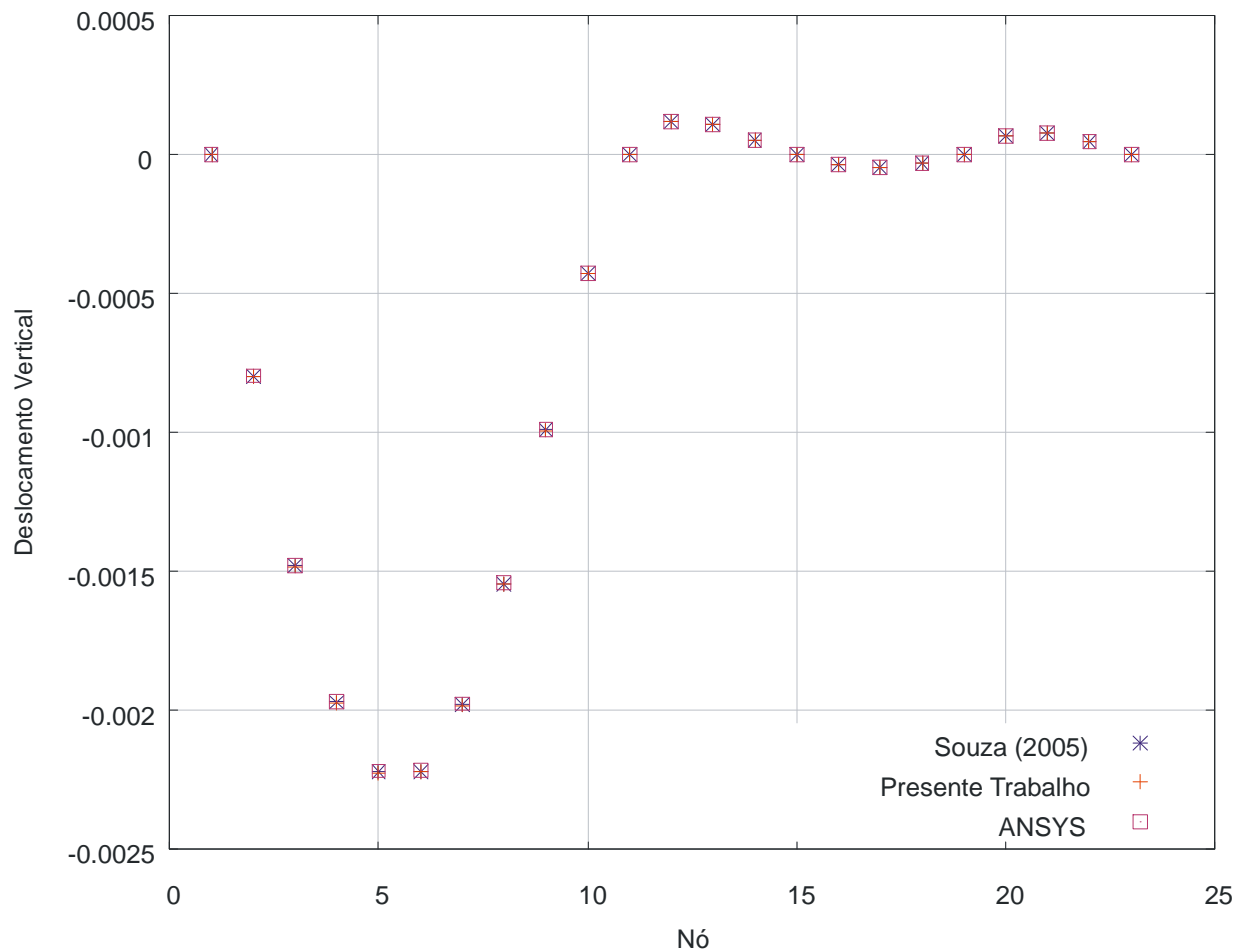
Nó	ANSYS		Souza (2005)		Presente Trabalho		Diferença Relativa do Deslocamento Vertical	
	Desl. Vertical (mm)	Rotação ($\times 10^{-3}$ rad)	Desl. Vertical (mm)	Rotação ($\times 10^{-3}$ rad)	Desl. Vertical (mm)	Rotação ($\times 10^{-3}$ rad)	Para ANSYS (%)	Para Souza (2005) (%)
1	0.0	-1.6737	0.0	-1.67422	0.0	-1.67364	-	-
2	-0.81534	-1.5480	-0.815594	-1.5485	-0.815330	-1.54804	0.001	0.032
3	-1.5148	-1.2228	-1.51524	-1.22302	-1.51480	-1.22278	0.000	0.026
4	-2.0169	-7.6974	-2.01736	-0.769819	-2.01685	-0.76974	0.002	0.027
5	-2.2743	-0.25480	-2.27477	-0.254762	-2.27424	-0.25479	0.003	0.025
6	-2.2717	0.25991	-2.27217	0.260024	-2.27169	0.259914	0.000	0.022
7	-2.0245	0.71352	-2.02492	0.713681	-2.02451	0.713520	0.000	0.019
8	-1.5787	1.0439	-1.57901	1.04411	-1.57868	1.04392	0.001	0.020
9	-1.0120	1.1856	-1.01224	1.18579	-1.01202	1.18557	0.002	0.018
10	-0.43630	1.0679	-0.43641	1.06815	-0.436296	1.06791	0.001	0.026
11	0.0	0.61472	0.0	0.614923	0.0	0.614711	-	-
12	0.12422	0.10363	0.124270	0.103701	0.124214	0.103617	0.005	0.045
13	0.11332	-0.12269	0.113377	-0.122728	0.113313	-0.12269	0.006	0.059
14	0.055195	-0.16502	0.0552275	-0.165115	0.0551901	-0.16502	0.009	0.069
15	0.0	-0.12374	0.0	-0.123804	0.0	-0.12372	-	-
16	-0.036940	-0.067107	-0.0369558	-0.067182	-0.0369388	-0.06712	0.003	0.047
17	-0.047857	0.0093369	-0.0478746	0.00934681	-0.0478555	0.009353	0.003	0.041
18	-0.031700	0.071696	-0.0317109	0.0717223	-0.0316993	0.071681	0.002	0.037
19	0.0	0.086752	0.0	0.0867799	0.0	0.086763	-	-
20	0.071163	0.029821	0.0711467	0.0298306	0.0711730	0.029825	0.014	0.037
21	0.081330	-0.010844	0.0813105	-0.0108475	0.0813405	-0.01084	0.013	0.036
22	0.050831	-0.035243	0.0508191	-0.0352543	0.0508378	-0.03525	0.013	0.037
23	0.0	-0.043376	0.0	-0.0433899	0.0	-0.04338	-	-

TABELA 5.5 – VALORES NODAIS DOS DESLOCAMENTOS AXIAIS E VERTICAIS OBTIDOS NA ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA

Nó	ANSYS		Souza (2005)		Presente Trabalho		Diferença Relativa do Deslocamento Vertical	
	Desl. Axial (mm)	Desl. Vertical (mm)	Desl. Axial (mm)	Desl. Vertical (mm)	Desl. Axial (mm)	Desl. Vertical (mm)	Para ANSYS (%)	Para Souza (2005) (%)
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-	-
2	-0.38083×10^{-3}	-0.79474	-0.38451×10^{-3}	-0.79632	-0.38471×10^{-3}	-0.79706	0.292	0.093
3	-0.59799×10^{-3}	-1.4764	-0.60422×10^{-3}	-1.4793	-0.60526×10^{-3}	-1.48067	0.289	0.093
4	-0.59372×10^{-3}	-1.9657	-0.60082×10^{-3}	-1.9696	-0.60186×10^{-3}	-1.97144	0.292	0.093
5	-0.41583×10^{-3}	-2.2169	-0.42223×10^{-3}	-2.2213	-0.42332×10^{-3}	-2.22326	0.287	0.088
6	-0.17554×10^{-3}	-2.2151	-0.18031×10^{-3}	-2.2194	-0.18124×10^{-3}	-2.22144	0.286	0.092
7	0.0	-1.9750	0.0	-1.9788	0.0	-1.98051	0.279	0.086
8	0.0	-1.5410	0.0	-1.5438	0.0	-1.54520	0.273	0.091
9	0.0	-0.98839	0.0	-0.99017	0.0	-0.990989	0.263	0.083
10	0.0	-0.42615	0.0	-0.42692	0.0	-0.427220	0.251	0.070
11	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-	-
12	0.12047	0.12050	0.120777	0.12081	0.120939	0.120972	0.392	0.134
13	0.10936	0.10938	0.109700	0.10972	0.109820	0.109838	0.419	0.108
14	0.053080	0.053087	0.05326427	0.053274	0.0533139	0.0533232	0.445	0.092
15	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-	-
16	0.0	-0.035816	0.0	-0.035910	0.0	-0.0359558	0.390	0.128
17	0.0	-0.046526	0.0	-0.046636	0.0	-0.0466967	0.367	0.130
18	0.0	-0.030846	0.0	-0.030916	0.0	-0.0309663	0.390	0.163
19	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-	-
20	0.0	0.068316	0.0	0.068562	0.0	0.0688372	0.763	0.401
21	0.0	0.077413	0.0	0.077756	0.0	0.0779808	0.733	0.289
22	0.0	0.048136	0.0	0.048373	0.0	0.0485367	0.832	0.338
23	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-	-

Conforme apresentado pelas Tabelas 5.4 e 5.5, a implementação da formulação do elemento finito ocorreu de forma satisfatória. A Figura 5.3 traz um diagrama comparativo dos deslocamentos verticais nodais da análise não-linear geométrica para uma melhor comparação entre os valores obtidos.

FIGURA 5.3 – DIAGRAMA COMPARATIVO DOS DESLOCAMENTOS VERTICAIS NODAIS DA ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA



As tensões máximas ocorrem na coordenada do nó 11 ($x = 5$, $y = 1.5$), cuja distribuição de tensões para a análise não linear geométrica é dada pela Figura 5.4. A Tabela 5.6 apresenta as tensões máximas obtidas, segundo o critério de Von Mises, na seção transversal deste nó para a análise linear e para a análise não-linear geométrica. Esta tabela traz, ainda, os valores apresentados por Souza (2005) e os valores obtidos com a simulação executada no programa ANSYS para comparação.

FIGURA 5.4 – TENSÕES NA SEÇÃO TRANSVERSAL DO NÓ 11 (AN. NÃO LINEAR GEOM.)

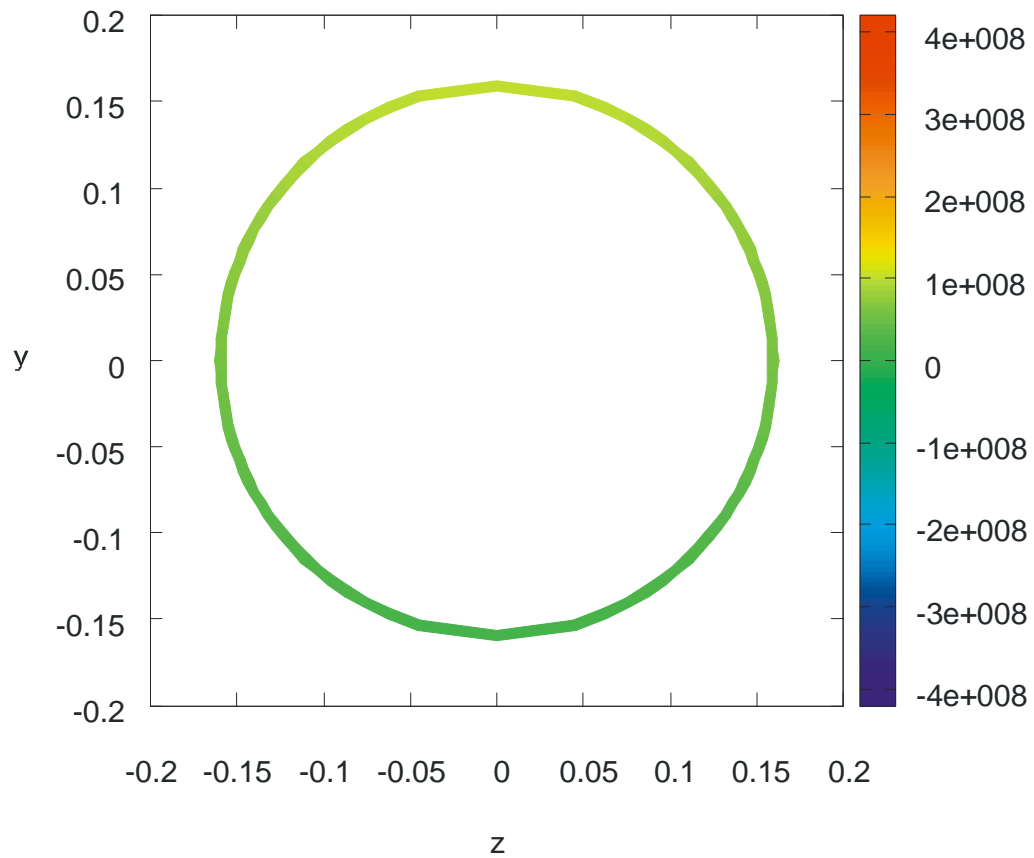


TABELA 5.6 – TENSÃO MÁXIMA OBTIDA PARA O NÓ 11

Tipo de Análise	ANSYS	Souza (2005)	Presente Trabalho
Tensão Máxima Análise Linear	100.53 MPa	99.66 MPa	99.67 MPa
Tensão Máxima An. Não-Linear	99.82 MPa	99.09 MPa	98.97 MPa

5.2 CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM DE VIGAS

Neste exemplo a carga crítica de flambagem é obtida numericamente através de dois modos: por uma análise não-linear incremental e por um cálculo linearizado. Os resultados obtidos nas análises numéricas são comparados ao resultado obtido com a aplicação da teoria clássica de Euler para obtenção da carga crítica de flambagem de vigas.

O modelo teórico estudado consiste de uma viga de 10 m de comprimento e de seção transversal circular sujeita à um carregamento axial. Foram consideradas, conforme ilustrado pela Figura 5.5, quatro condições de contorno: engastada em uma extremidade e livre na outra, bi-engastada, bi-apoiada e engastada em uma extremidade e apoiada na outra. As Tabelas 5.7 e 5.8 apresentam as propriedades materiais e geométricas, respectivamente, consideradas.

FIGURA 5.5 – SEÇÃO TRANSVERSAL DA VIGA E CONDIÇÕES DE CONTORNO CONSIDERADAS

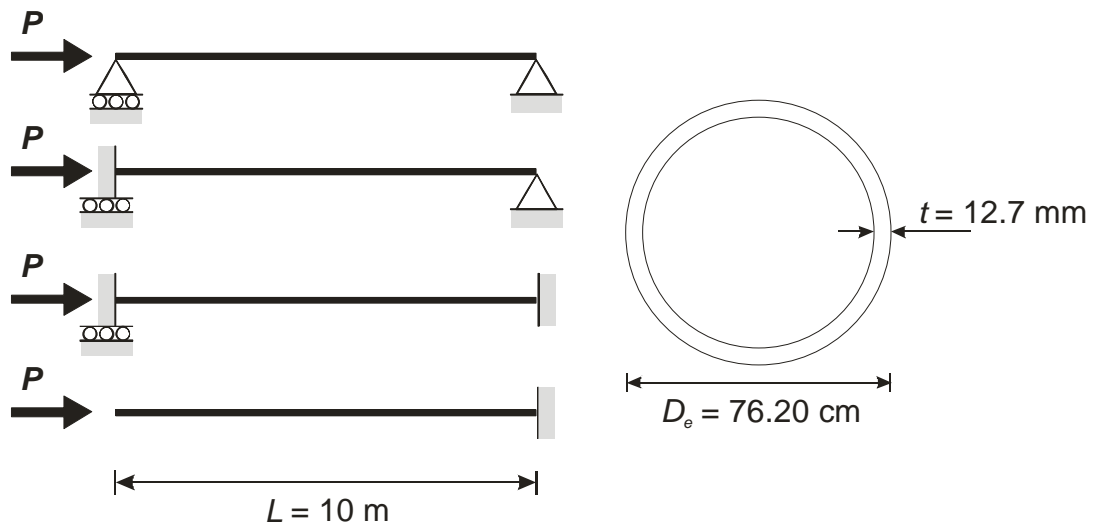


TABELA 5.7 – PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS

Propriedade	Unidade	Valor
I – Momento de Inércia	m^4	2.098725×10^{-3}
A – Área da seção transversal	m^2	2.989574×10^{-2}
D_e – Diâmetro externo do duto	cm	76.20
D_i – Diâmetro interno do duto	cm	73.66
t – Espessura da parede do Duto	mm	12.70

TABELA 5.8 – PROPRIEDADES MATERIAIS

Propriedade	Unidade	Valor
E – Módulo de Young	GPa	205.0
E_T – Módulo Tangente	GPa	75.0
S_y – Tensão de escoamento	MPa	420.0
ν – Coeficiente de Poisson	-	0.25

As cargas críticas de flambagem, obtidas com a aplicação da Equação (4.3) para as diferentes condições de contorno apresentadas pela Figura 5.5, são dadas pela Tabela 5.9.

TABELA 5.9 – CARGAS CRÍTICAS DE FLAMBAGEM SEGUNDO FORMULAÇÃO DE EULER

Condição de Contorno	Comprimento de Flambagem	Carga Crítica
Bi-apoiada	10 m	42 463 kN
Engastada em uma extremidade e apoiada na outra	7 m	86 659 kN
Bi-engastada	5 m	169 851 kN
Livre em uma extremidade e engastada na outra	20 m	10 616 kN

No cálculo linearizado, descrito na segunda seção do Capítulo 5, para obtenção da carga crítica de flambagem realizou-se uma análise não-linear geométrica utilizando seis elementos e 10 passos de carga com uma carga final P igual a 2000 kN. A matriz de rigidez do tempo $t - \Delta t$ foi obtida no primeiro passo de carga, enquanto que a matriz de rigidez do tempo t foi obtida no último passo de carga. A Tabela 5.10 traz as cargas críticas de flambagem obtidas com o cálculo linearizado.

TABELA 5.10 – CARGAS CRÍTICAS DE FLAMBAGEM OBTIDAS COM O CÁLCULO LINEARIZADO – PRESENTE TRABALHO

Condição de Contorno	Comprimento de Flambagem	Carga Crítica
Bi-apoiada	10 m	43 055 kN
Engastada em uma extremidade e apoiada na outra	7 m	88 314 kN
Bi-engastada	5 m	175 707 kN
Livre em uma extremidade e engastada na outra	20 m	10 827 kN

Os resultados obtidos para a carga crítica de flambagem através da análise não-linear incremental são variáveis conforme a quantidade de passos de carga utilizados. Geralmente, quanto maior a quantidade de incrementos, mais precisa é a resposta. Nessa análise foram utilizados 50, 100, 150, 200 e 400 passos de carga para efeito de comparação, também utilizando seis elementos.

Assim sendo, a Tabela 5.11 apresenta os resultados obtidos para a carga crítica de flambagem utilizando a análise não-linear incremental, considerando as mesmas condições de contorno dos métodos anteriores.

TABELA 5.11 – CARGAS CRÍTICAS DE FLAMBAGEM OBTIDAS COM A ANÁLISE NÃO-LINEAR INCREMENTAL SEM CONSIDERAR A NÃO-LINEARIDADE MATERIAL

Quant. de passos de carga Condição de contorno	50	100	150	200	400
Bi-apoiada	43 650 kN	43 425 kN	43 049 kN	42 862 kN	42 018 kN
Engastada em uma extremidade e apoiada na outra	90 250 kN	89 550 kN	87 898 kN	87 975 kN	87 412 kN
Bi-engastada	180 500 kN	179 550 kN	177 963 kN	177 175 kN	175 512 kN
Livre em uma extremidade e engastada na outra	10 920 kN	10 740 kN	10 680 kN	10 650 kN	10 545 kN

Para uma melhor comparação dos resultados obtidos nas análises numéricas, a Tabela 5.12 lista o erro dos resultados numéricos em relação aos resultados obtidos com a formulação de Euler.

TABELA 5.12 – ERRO DAS ANÁLISES NUMÉRICAS

Condição de contorno Análise numérica	Bi-apoiada	Engastada em uma extremidade e apoiada na outra	Bi-engastada	Livre em uma extremidade e engastada na outra
Cálculo linearizado	1.39 %	1.91 %	3.45 %	1.99 %
Não-linear incremental com 50 incrementos	1.38 %	2.19 %	2.73 %	0.86 %
Não-linear incremental com 100 incrementos	0.86 %	1.40 %	2.19 %	0.80 %
Não-linear incremental com 150 incrementos	0.01 %	0.47 %	1.28 %	1.36 %
Não-linear incremental com 200 incrementos	0.45 %	0.38 %	0.84 %	1.64 %
Não-linear incremental com 400 incrementos	2.41 %	1.02 %	0.11 %	2.61 %

É interessante observar que, com a análise não-linear incremental, quanto maior a não-linearidade geométrica da estrutura, menos incrementos são necessários para se atingir um bom resultado. Outra vantagem deste método é a possibilidade de considerar a não-linearidade material. No exemplo aqui apresentado, foi desconsiderada a não-linearidade material para que fosse possível a comparação com os resultados obtidos com a formulação de Euler e com o cálculo linearizado.

A Tabela 5.13 apresenta os valores obtidos com a análise não-linear incremental considerando a não-linearidade material para a carga crítica de flambagem. Para o caso em que a viga se encontra bi-apoiada, houve, em média, uma redução de 70% na carga crítica de flambagem em comparação aos valores obtidos sem a consideração da não-linearidade material. Já para a viga engastada em uma extremidade e apoiada na outra e para a viga bi-engastada a redução foi de aproximadamente 85%, em média. Na viga livre em uma extremidade e engastada na outra não ocorreu a plastificação do material.

TABELA 5.13 – CARGAS CRÍTICAS DE FLAMBAGEM OBTIDAS COM A ANÁLISE NÃO-LINEAR INCREMENTAL CONSIDERANDO A NÃO-LINEARIDADE MATERIAL

Quant. de passos de carga Condição de contorno	50	100	150	200	400
Bi-apoiada	12 870 kN	12 675 kN	12 610 kN	12 643 kN	12 594 kN
Engastada em uma extremidade e apoiada na outra	13 650 kN	13 370 kN	12 833 kN	13 195 kN	12 618 kN
Bi-engastada	29 700 kN	27 750 kN	27 101 kN	26 925 kN	25 688 kN
Livre em uma extremidade e engastada na outra	10 920 kN	10 740 kN	10 680 kN	10 650 kN	10 545 kN

Por outro lado, devido ao grande esforço computacional necessário na análise não-linear incremental, a utilização do cálculo linearizado pode ser útil uma vez que este método fornece um resultado razoável a um baixo custo computacional. Além disso, é possível a obtenção das cargas críticas de flambagem para outros modos de flambagem, além do primeiro modo, e a visualização gráfica dos modos de flambagem. As Figuras 5.6 a 5.9 apresentam os dois primeiros modos de flambagem da viga

considerada, obtidos com o cálculo linearizado, para as quatro condições de contorno consideradas.

FIGURA 5.6 – MODOS DE FLAMBAGEM DA VIGA BI-APOIADA

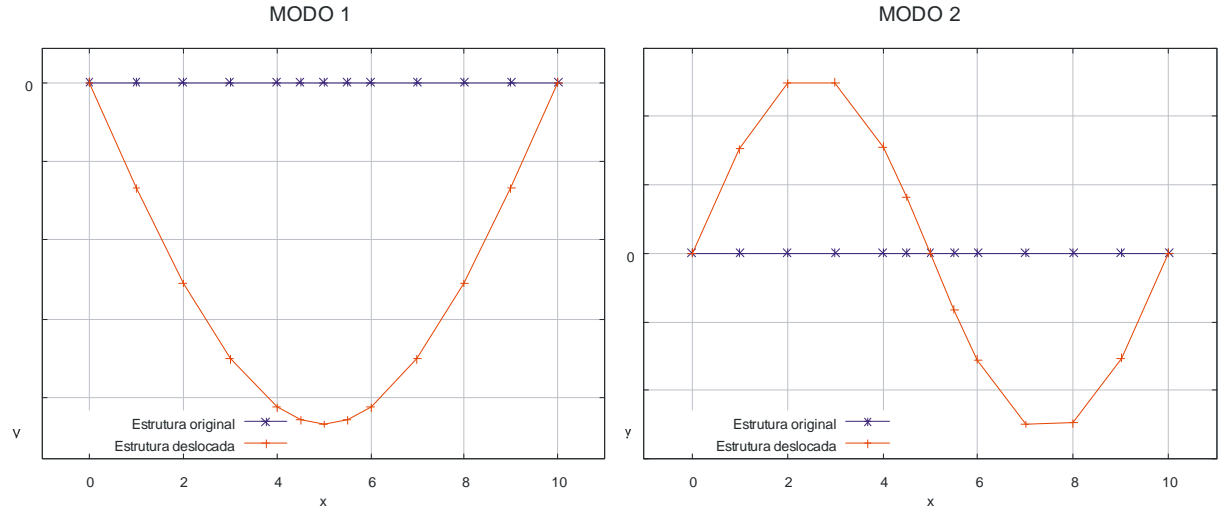


FIGURA 5.7 – MODOS DE FLAMBAGEM DA VIGA ENGASTADA EM UMA EXTREMIDADE E APOIADA NA OUTRA

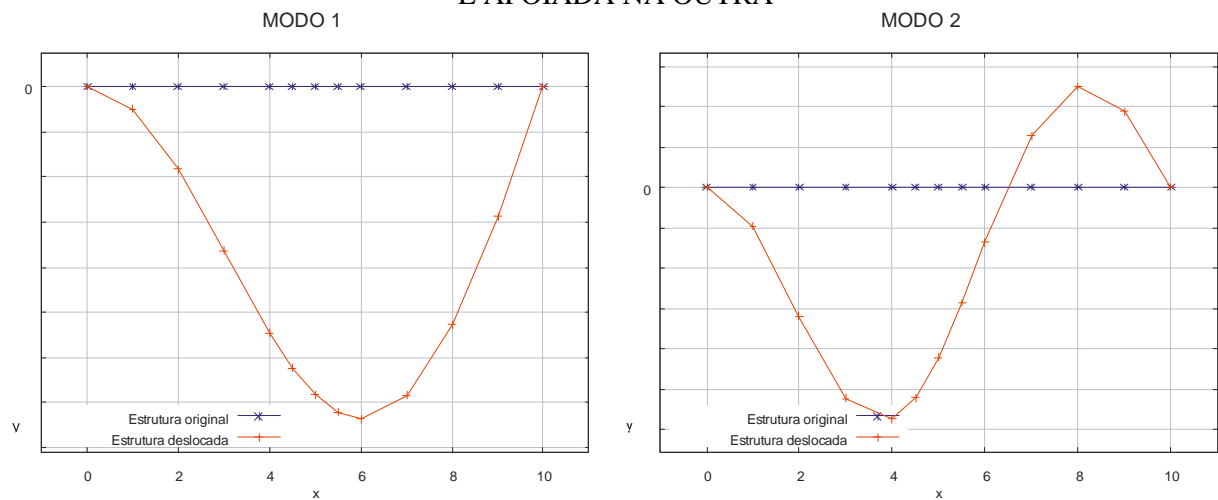


FIGURA 5.8 – MODOS DE FLAMBAGEM DA VIGA BI-ENGASTADA

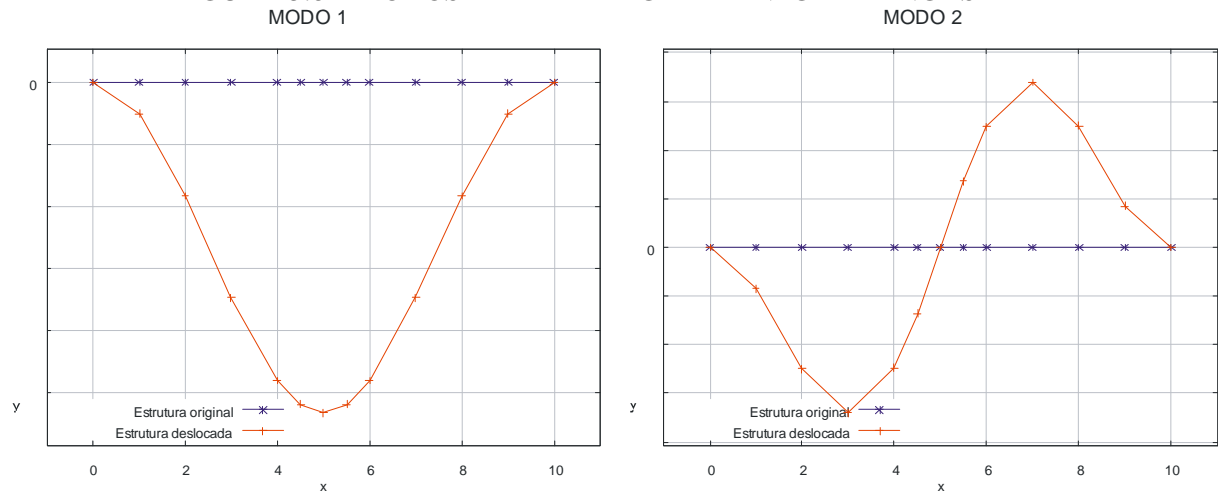
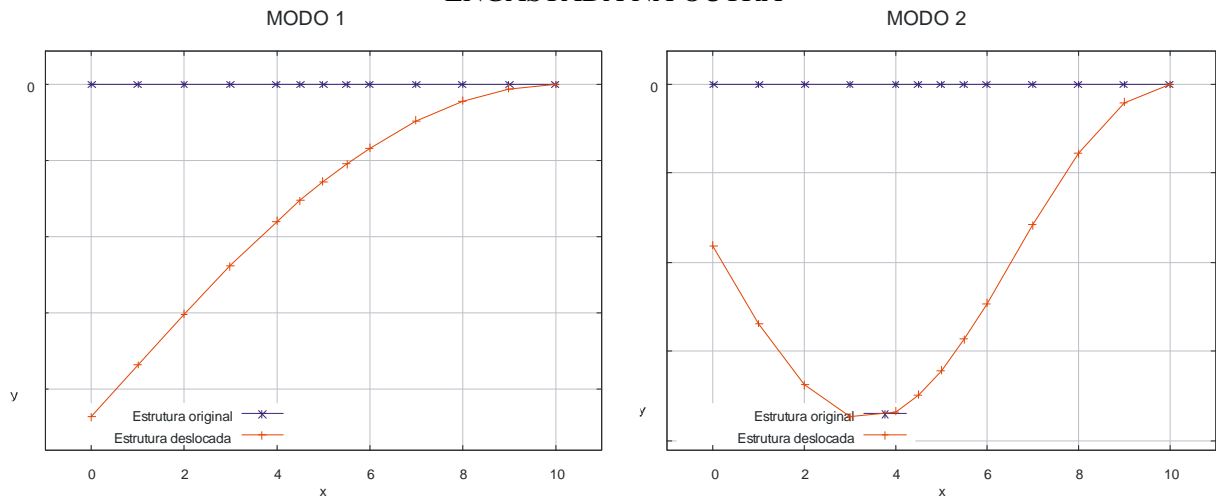


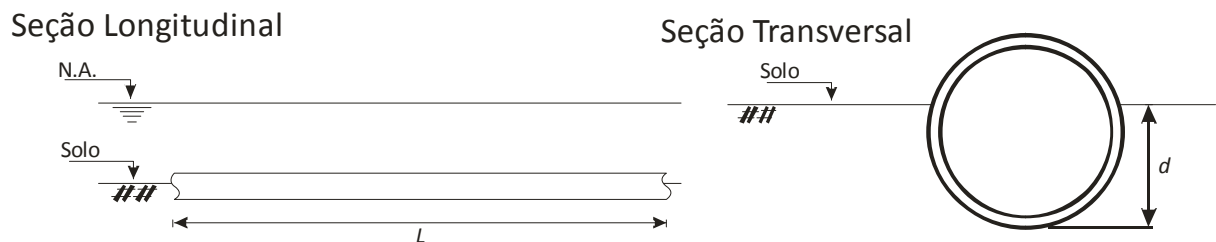
FIGURA 5.9 – MODOS DE FLAMBAGEM DA VIGA LIVRE EM UMA EXTREMIDADE E ENGASTADA NA OUTRA



5.3 TEMPERATURA CRÍTICA DE FLAMBAGEM DE DUTOS APOIADOS SOBRE SOLO ARGILOSO

O problema aqui apresentado foi retirada do trabalho de Benjamin e Andrade (2001). Neste exemplo, os resultados obtidos com a aplicação do método analítico de Hobbs (ver Capítulo 4.5) para obtenção da temperatura crítica de flambagem de um duto penetrado no solo em três variações de profundidades (10 cm, 25 cm e 50 cm) são comparados aos resultados numéricos obtidos através da análise não-linear incremental. A Figura 5.10 traz uma ilustração do problema.

FIGURA 5.10 – MODELO DO DUTO SIMULADO



Os dados materiais e geométricos utilizados são apresentados pelas Tabelas 5.14 e 5.15, respectivamente. Como no método de Hobbs o material do duto é considerado elástico linear, na análise não-linear incremental o material do duto também foi assim considerado.

TABELA 5.14 – PROPRIEDADES MATERIAIS DO DUTO

Propriedade	Unidade	Valor
E – Módulo de Young	GPa	200.0
ν – Coeficiente de Poisson	-	0.30
α – Coeficiente de dilatação térmica	$^{\circ}\text{C}^{-1}$	1.19×10^{-5}
w – peso submerso do duto	kN/m	1.457
p_{int} – pressão interna de operação	MPa	3.5

Fonte: Benjamin e Andrade (2001).

TABELA 5.15 – PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DO DUTO

Propriedade	Unidade	Valor
I – Momento de Inércia	m^4	1.9687×10^{-4}
A – Área da seção transversal	m^2	9.9147×10^{-3}
D_e – Diâmetro externo do duto	cm	40.64
D_i – Diâmetro interno do duto	cm	39.056
t – Espessura da parede do duto	mm	7.92

Fonte: Benjamin e Andrade (2001).

Uma outra limitação do método de Hobbs é que este considera o solo como sendo rígido, assim, poucos dados referentes ao solo de base foram fornecidos por Benjamin e Andrade (2001). Como o elemento finito empregado neste trabalho utiliza molas para representação do solo, tanto na base quanto nas laterais, fez-se uso dos dados de solo apresentados por Da Costa et al. (2002) para obtenção das constantes de mola de representação do solo de base. Isto só foi possível porque esses autores e Benjamin e Andrade (2001) abordaram o mesmo problema, mas de formas diferentes.

Segundo Da Costa et al. (2002), o solo considerado é uma argila orgânica muito mole, de comportamento não drenado, cuja resistência não drenada (S_u) é dada, em kPa, em função da profundidade (d) pela Equação (5.2). O peso específico total do solo (γ_s) foi considerado como igual a 15 kN/m^3 .

$$S_u = 1.4 + 0.427d \quad (5.2)$$

Uma relação entre o módulo de elasticidade do solo (E_s) e a resistência não drenada do solo foi obtida através do uso de um dilatômetro e é dada pela Equação

(5.3). Devido à condição não drenada, não ocorrem deformações volumétricas no solo e, portanto, o coeficiente de Poisson do solo (ν_s) é assumido como igual a 0.5.

$$E_s = S_u \left(307.948 - 80.9164d + 15.1711d^2 - 1.39619d^3 + 0.049d^4 \right) \quad (5.3)$$

De posse das propriedades mecânicas do solo, é possível obter a constante de rigidez de mola por unidade de comprimento de representação do solo de base (κ_{BS}) através do procedimento descrito no Apêndice C.

As reações do solo aos deslocamentos axial (R_{axi}) e lateral (R_{lat}) utilizados por Benjamin e Andrade (2001) são dadas pela Tabela 5.16. Como estes autores adotaram para R_{lat} o valor da reação correspondente ao deslocamento de 12 mm, a partir do qual se considera que o solo rompeu-se, o cálculo das constantes de rigidez de mola de representação da contenção lateral do solo (κ_{LLS} e κ_{RLS}) se dá de forma direta com a aplicação da Equação (C.2). A Tabela 5.17 apresenta o valor dessas constantes para as diferentes profundidades de penetração do duto no solo.

TABELA 5.16 – REAÇÕES DO SOLO AOS DESLOCAMENTOS AXIAL E LATERAL DO DUTO

Condição de Apoio do Duto	d (m)	R_{axi} (kN/m)	R_{lat} (kN/m)
Parcialmente enterrado em solo argiloso	0.10	0.6491	0.7611
Parcialmente enterrado em solo argiloso	0.25	1.0996	1.8413
Totalmente enterrado em solo argiloso	0.50	2.1991	4.1998

Fonte: Benjamin e Andrade (2001).

TABELA 5.17 – CONSTANTES DE RIGIDEZ DE MOLA CONSIDERADAS

d (m)	κ_{BS} (kN/m/m)	κ_{LLS} (kN/m/m)	κ_{RLS} (kN/m/m)
0.10	166.797	63.425	63.425
0.25	172.745	153.442	153.442
0.50	179.412	349.983	349.983

A transformação da carga crítica de flambagem (P_{cr}) na temperatura crítica de flambagem (ΔT_f) se dá através da Equação (5.4), a qual é uma variação da Equação

(4.1). O acréscimo de temperatura equivalente ao efeito da pressão interna (ΔT_p) é calculado com a Equação (5.5). Com ΔT_f e ΔT_p é possível determinar a temperatura máxima admissível no duto (ΔT_T) por meio da Equação (5.6).

$$\Delta T_f = \frac{P_{cr}}{EA\alpha} \quad (5.4)$$

$$\Delta T_p = \frac{p_{int}(D_e - t)}{4tE\alpha}(1 - 2\nu) \quad (5.5)$$

$$\Delta T_T = \Delta T_f - \Delta T_p \quad (5.6)$$

5.3.1 Resultados Obtidos com a Aplicação do Método de Hobbs

No artigo apresentado por Benjamin e Andrade (2001), apenas foram obtidas as temperaturas críticas de flambagem para o plano lateral. Aqui, além destas, serão apresentadas as temperaturas críticas de flambagem para o plano vertical, uma vez que na análise não-linear incremental não é possível determinar qual é o plano de flambagem.

Assim sendo, aplicou-se o Método de Hobbs modificado para obtenção das temperaturas críticas de flambagem para o plano lateral e o Método de Hobbs para obtenção das temperaturas críticas de flambagem para o plano vertical. A Tabela 5.18 apresenta os resultados obtidos para a flambagem no plano vertical enquanto que as Tabelas 5.19 a 5.21 apresentam os resultados obtidos para a flambagem no plano lateral.

TABELA 5.18 – TEMPERATURA CRÍTICA DE FLAMBAGEM NO PLANO VERTICAL
SEGUNDO O MÉTODO DE HOBBS

d (m)	L_f (m)	P (kN)	P_{cr} (kN)	ΔT_f (°C)
0.10	75.30	560.81	1 181.91	50.09
0.25	61.30	846.22	1 238.59	52.49
0.50	49.60	1292.54	1 657.79	70.25

TABELA 5.19 – TEMPERATURA CRÍTICA DE FLAMBAGEM NO PLANO LATERAL SEGUNDO O MÉTODO DE HOBBS MODIFICADO PARA PENETRAÇÃO DE 0.10 M

Modo	L_f (m)	P (kN)	P_{cr} (kN)	ΔT_f (°C)
1	75.30	560.72	862.06	36.53
2	53.30	547.16	834.51	35.37
3	50.00	536.41	821.09	34.80
4	45.30	541.08	820.30	34.76

TABELA 5.20 – TEMPERATURA CRÍTICA DE FLAMBAGEM NO PLANO LATERAL SEGUNDO O MÉTODO DE HOBBS MODIFICADO PARA PENETRAÇÃO DE 0.25 M

Modo	L_f (m)	P (kN)	P_{cr} (kN)	ΔT_f (°C)
1	61.30	846.22	1 311.46	55.58
2	43.30	829.11	1 270.83	53.86
3	40.60	813.58	1 251.30	53.03
4	36.60	828.89	1 250.75	53.00

TABELA 5.21 – TEMPERATURA CRÍTICA DE FLAMBAGEM NO PLANO LATERAL SEGUNDO O MÉTODO DE HOBBS MODIFICADO PARA PENETRAÇÃO DE 0.50 M

Modo	L_f (m)	P (kN)	P_{cr} (kN)	ΔT_f (°C)
1	49.60	1 292.54	2 005.07	84.97
2	35.00	1 268.97	1 941.87	82.29
3	32.60	1 261.88	1 911.30	81.00
4	29.60	1 267.29	1 909.96	80.94

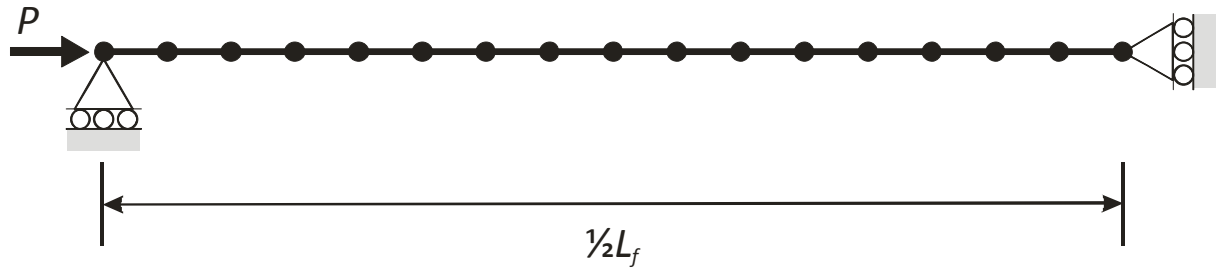
Para os cálculos das temperaturas críticas de flambagem para penetração de 0.50 m do duto somou-se ao peso submerso do duto (w) uma carga de 570.59 N/m correspondente ao peso do solo sobre o duto (q_{solo}). Esta carga foi obtida com o uso da Equação (5.1) considerando $h = d - D_e$.

5.3.2 Resultados Obtidos com a Análise Não-Linear Incremental

A simulação numérica se deu através do método não-linear incremental onde, devido a simetria do problema, a malha de elementos finitos considera apenas metade da estrutura, a fim de otimizar o desempenho computacional. Nesta simulação foram

utilizados 8 elementos e dividiu-se a seção transversal do duto em 70 faixas de área. A malha de elementos finitos utilizada em todas as simulações deste exemplo é ilustrada pela Figura 5.11.

FIGURA 5.11 – MALHA DE ELEMENTOS FINITOS



Os resultados da temperatura crítica de flambagem obtidos com a análise não-linear incremental para penetração de 0.10 m, 0.25 m e 0.50 m são apresentados pelas Tabelas 5.22, 5.23 e 5.24, respectivamente. Estas tabelas apresentam, ainda, a diferença em relação à temperatura crítica de flambagem obtida com o método de Hobbs para o plano vertical (ver Tabela 5.17).

TABELA 5.22 – TEMPERATURA CRÍTICA DE FLAMBAGEM OBTIDA ATRAVÉS DA ANÁLISE NÃO-LINEAR INCREMENTAL PARA PENETRAÇÃO DE 0.10 M

Quant. de Incrementos	P_f (kN)	$P_{axi} = R_{axi} 0.5L_f$ (kN)	P_{cr} (kN)	ΔT_f (°C)	Diferença para Hobbs (%)
50	1 131.00	24.44	1 155.44	48.97	2.24
100	1 098.50	24.44	1 122.94	47.59	4.99
250	1 058.20	24.44	1 082.64	45.88	8.40
500	1 043.90	24.44	1 068.34	45.27	9.61

TABELA 5.23 – TEMPERATURA CRÍTICA DE FLAMBAGEM OBTIDA ATRAVÉS DA ANÁLISE NÃO-LINEAR INCREMENTAL PARA PENETRAÇÃO DE 0.25 M

Quant. de Incrementos	P_f (kN)	$P_{axi} = R_{axi} 0.5L_f$ (kN)	P_{cr} (kN)	ΔT_f (°C)	Diferença para Hobbs (%)
50	1 305.00	33.70	1 338.70	56.73	8.08
100	1 282.50	33.70	1 316.20	55.78	6.27
250	1 257.00	33.70	1 290.70	54.70	4.21
500	1 249.50	33.70	1 283.20	54.38	3.60

TABELA 5.24 – TEMPERATURA CRÍTICA DE FLAMBAGEM OBTIDA ATRAVÉS DA ANÁLISE NÃO-LINEAR INCREMENTAL PARA PENETRAÇÃO DE 0.50 M

Quant. de Incrementos	P_f (kN)	$P_{axi} = R_{axi} 0.5L_f$ (kN)	P_{cr} (kN)	ΔT_f (°C)	Diferença para Hobbs (%)
50	1 743.00	54.54	1 797.54	76.18	8.43
100	1 627.50	54.54	1 682.04	71.28	1.46
250	1 465.80	54.54	1 520.34	64.43	8.29
500	1 465.80	54.54	1 520.34	64.43	8.29

5.3.3 Discussão dos Resultados

À primeira vista pode parecer que os resultados obtidos na análise não-linear incremental não são satisfatórios, entretanto deve-se atentar para o fato de que o método de Hobbs considera o solo como sendo rígido, diferentemente da formulação do elemento finito aqui empregado.

Como mencionado anteriormente, Da Costa et al. (2002) também estudaram o problema aqui apresentado realizando uma análise por elementos finitos muito sofisticada através do programa comercial ABAQUS 6.2.1. Na simulação conduzida por esses autores o duto foi modelado por uma malha tridimensional com 1326 elementos PIPE31 enquanto que o solo foi representado por 3975 molas não-lineares.

Algumas propriedades materiais, dadas pela Tabela 5.25, diferem um pouco das utilizados por Benjamin e Amaral (2001). O comprimento de flambagem foi considerado como igual a 100 m.

TABELA 5.25 – PROPRIEDADES MATERIAIS DO DUTO

Propriedade	Unidade	Valor
E – Módulo de Young	GPa	205.0
S_y – Tensão de Escoamento	MPa	425.0
α – Coeficiente de dilatação térmica	°C ⁻¹	1.17×10^{-5}
p_{int} – pressão interna de operação	MPa	8.93
T_i – temperatura inicial do duto	°C	20.0

Fonte: Da Costa et al. (2002).

Aplicando no duto incrementos de 2 °C até o máximo de 100 °C, Da Costa et al. (2002) chegaram a uma temperatura crítica de flambagem de 52 °C. Realizando uma simulação com o elemento apresentado por Souza (2005), onde foram empregados 8 elementos os mesmos incrementos considerados por Da Costa et al. (2002), chegou-se a uma temperatura crítica de 55 °C, diferença de 5.8%. Como Da Costa et al. (2002) não especificaram o valor da penetração do duto no solo, adotaram-se os dados para penetração de 0.10 m.

5.4 CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM DE UMA TUBULAÇÃO DE ENCOSTA SUJEITA A DESLIZAMENTOS DE TERRA

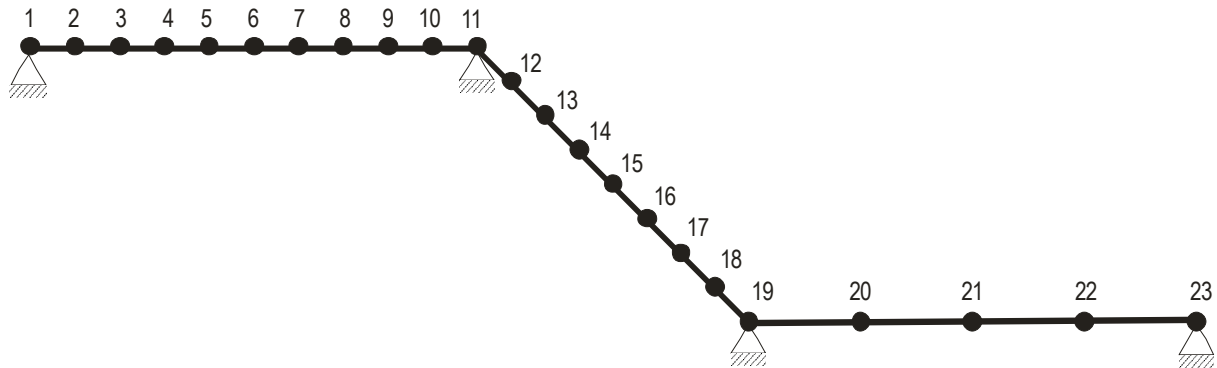
Em encostas é muito comum haver deslizamentos de terra que ocorrem de forma muito lenta. Estes deslizamentos de terra podem remover o solo de base de uma tubulação e gerar forças axiais de compressão ao longo da tubulação (ver Figura 1.2).

Portanto, a presente simulação obtém a carga crítica de flambagem, através da análise não-linear incremental, para uma situação como a mencionada em três etapas:

- Duto totalmente enterrado;
- Duto parcialmente enterrado;
- Duto totalmente desenterrado.

Para realização das simulações numéricas foram utilizados 11 elementos (ver Figura 5.12) e 100 passos de carga foram utilizados no processo iterativo incremental. As forças internas foram determinadas pela divisão da seção transversal do duto em 70 faixas de área. As análises empregadas consideraram tanto a não-linearidade material quanto a não-linearidade geométrica.

FIGURA 5.12 – MALHA DE ELEMENTOS FINITOS



As propriedades geométricas e materiais do duto são dadas pelas Tabelas 5.26 e 5.27, respectivamente. Os carregamentos externos considerados são apresentados pela Tabela 5.28, onde a carga correspondente ao peso do solo sobre o duto (q_{solo}) foi obtida com o uso da Equação (5.1). Uma pressão interna constante de 9 MPa ao longo da tubulação também foi considerada.

TABELA 5.26 – PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS

Propriedade	Unidade	Valor
I – Momento de inércia	m^4	7.9516531×10^{-5}
A – Área da seção transversal	m^2	6.2586416×10^{-3}
D_e – Diâmetro externo do duto	cm	32.50
D_i – Diâmetro interno do duto	cm	31.25
t – Espessura da parede do duto	mm	6.25

TABELA 5.27 – PROPRIEDADES MATERIAIS DO AÇO API X52

Propriedade	Unidade	Valor
E – Módulo de Young	GPa	205.0
E_T – Módulo tangente	GPa	75.0
S_y – Tensão de escoamento	MPa	420.0
S_R – Tensão de ruptura	MPa	540.0
ν – Coeficiente de Poisson	-	0.25
α – Coeficiente expansão térmica	$^{\circ}C^{-1}$	1.17×10^{-5}

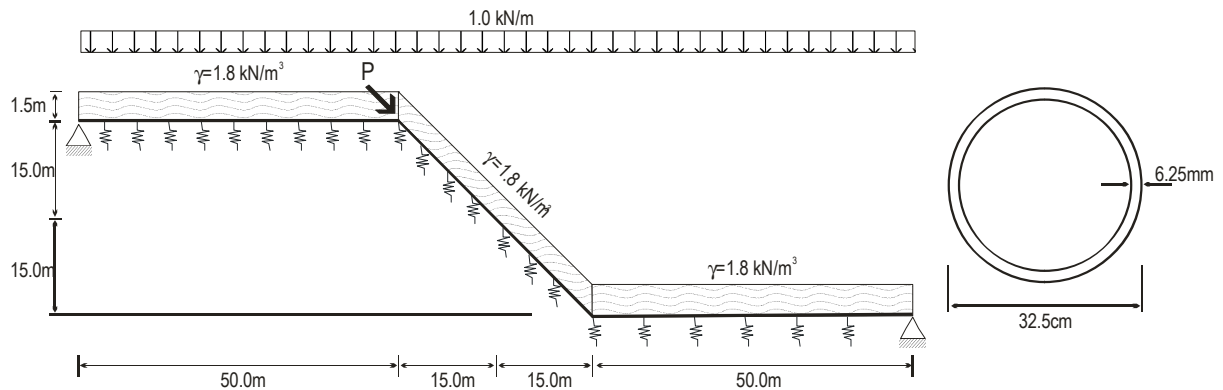
TABELA 5.28 – CARREGAMENTOS EXTERNOS AO LONGO DA TUBULAÇÃO

x	γ_s (kN/m ³)	q_{solo} (N/m)	q (kN/m)
0.0 a 130.0 m	1.80	877.5	1.0

A interação solo-estrutura foi simulada com a utilização de molas de base, superiores, laterais e axiais, cujos coeficientes de rigidez por unidade de comprimento são os seguintes: $\kappa_{BS} = 1\,295$ kN/m/m, $\kappa_{US} = 970$ kN/m/m, $\kappa_{LLS} = \kappa_{RLS} = 1\,500$ kN/m/m e $\kappa_{AS} = 130$ kN/m/m.

Para o duto totalmente enterrado, a simulação foi conduzida conforme apresentado pela Figura 5.13.

FIGURA 5.13 – CASO 1: DUTO TOTALMENTE ENTERRADO



A carga crítica de flambagem obtida para esta situação foi igual a 5 232 kN. Para se chegar a esta carga seria necessária uma variação de temperatura equivalente a aproximadamente 348 °C e a tensão máxima de tração no nó 11 seria de 2.04 GPa, a qual é superior, e em muito, a tensão de ruptura. A tensão máxima de compressão também ocorre no nó 11 e seria igual a 1.31 GPa.

Para a tubulação parcialmente descoberta (Figura 5.14) a carga crítica de flambagem foi igual a 1 093 kN, que é equivalente a uma variação de temperatura de 73 °C. Tanto a tensão máxima de tração quanto a de compressão ocorrem no nó 13 e são iguais a 256 MPa e 506 MPa, respectivamente.

FIGURA 5.14 – CASO 2: DUTO PARCIALMENTE ENTERRADO

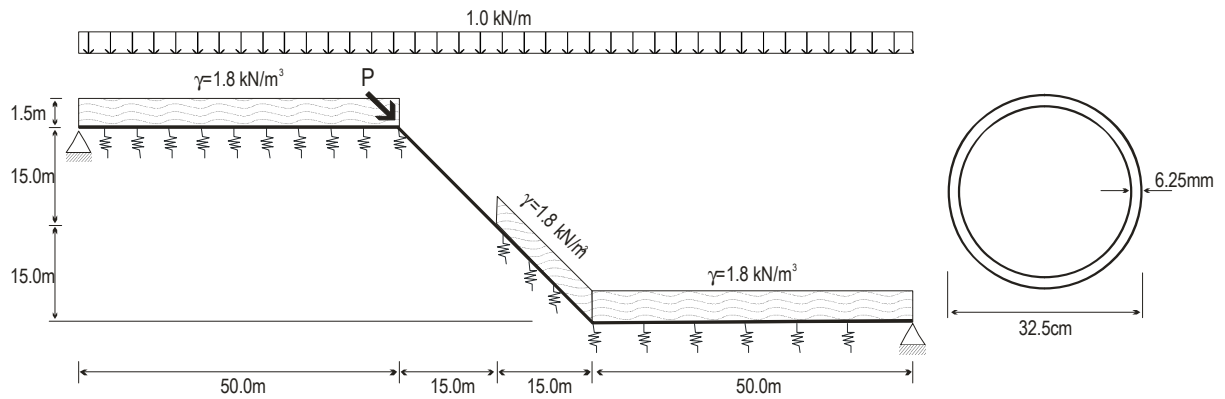
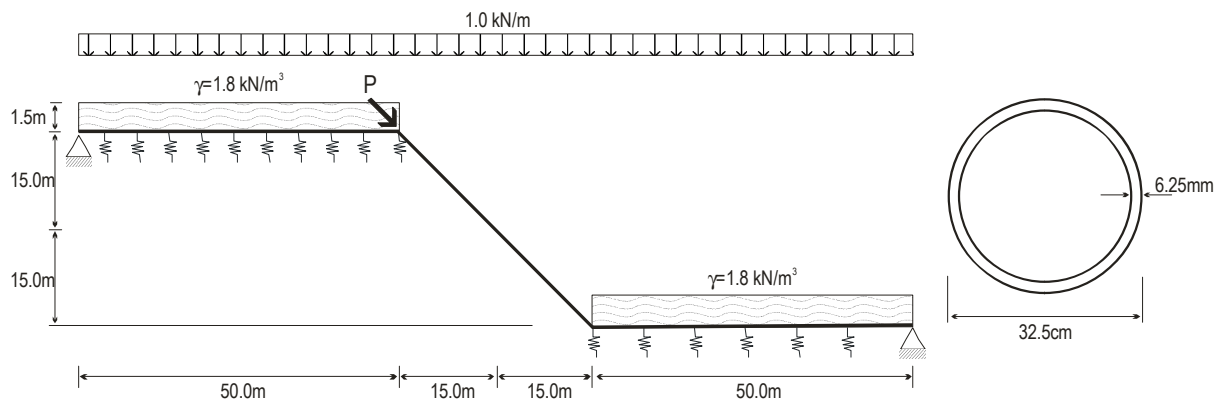


FIGURA 5.15 – CASO 3: DUTO TOTALMENTE DESCOBERTO



A situação em que toda a região da tubulação localizada na encosta encontra-se descoberta, ilustrada pela Figura 5.15, leva a uma carga crítica de 1 110 kN e uma temperatura crítica de flambagem de 74 °C. A tensão máxima de tração observada ocorreu no nó 9 e foi de 805 MPa, 49% superior à tensão de ruptura considerada. Já a tensão máxima de compressão ocorreu no nó 11 sendo igual a 2.24 GPa. A Tabela 5.29 resume os resultados obtidos nos três casos estudados.

TABELA 5.29 – COMPARAÇÃO ENTRE OS CASOS ESTUDADOS

Caso	Carga Crítica (kN)	Temperatura E- quivalente (°C)	Tração Máxima (MPa)	Compressão Má- xima (MPa)
1	5 232.59	348.58	2 035.49	1 308.22
2	1 096.02	73.01	255.84	506.02
3	1 110.16	73.95	805.28	2 236.40

Analisando os dados da Tabela 5.29 verifica-se que numa situação como a ilustrada pela Figura 5.13 (caso 1) a ocorrência de flambagem em situações normais é praticamente impossível devido à contenção exercida pelo solo. Já nos casos 2 e 3 as temperaturas críticas de flambagem possuem um valor que não é difícil de ocorrer em situações reais, além de se mostrarem muito próximas, com uma diferença de menos de 1 °C. No caso 3, antes da ocorrência da flambagem o duto se romperia na região do nó 9 devido à alta tensão de tração neste local mostrada pela simulação numérica.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho utilizou o elemento finito apresentado por Souza (2005) para a obtenção das cargas críticas de flambagem em dutos. Para tanto, foi desenvolvido um programa utilizando a linguagem computacional Fortran. Neste programa empregaram-se duas técnicas numéricas já consagradas: o método modificado de Newton-Raphson para solução de equações não-lineares e o método generalizado de Jacobi para solução de problemas generalizados de autovalores e autovetores.

As simulações numéricas efetuadas mostraram que a implementação do elemento finito está em conformidade com a apresentada por Souza (2005) e que a utilização deste elemento finito para avaliação da carga crítica de flambagem em dutos é válida.

Os métodos numéricos utilizados para obtenção da carga crítica de flambagem foram o cálculo linearizado e a análise numérica incremental.

Apesar do grande esforço computacional necessário na análise numérica incremental, esta se mostrou mais eficaz na obtenção das cargas críticas de flambagem de dutos enterrados do que o cálculo linearizado, pois as cargas extras devido ao peso próprio do duto e ao peso do solo não influem tanto no resultado final como no cálculo linearizado. Outra vantagem da análise numérica incremental frente ao cálculo linearizado, como já mencionado, é a possibilidade de se considerar o efeito da não-linearidade material que reduz significativamente a carga crítica de flambagem. Por outro lado, com o cálculo linearizado é possível obter os modos de flambagem da estrutura, fato que deve ser considerado em algumas situações.

A segunda e a terceira simulações numéricas, apresentadas no Capítulo 7, mostraram que a formulação utilizada neste trabalho se comporta de forma satisfatória para avaliação das cargas críticas de flambagem. Já a última simulação numérica apresentada mostra como a contenção exercida pelo solo influi no comportamento final da estrutura.

Por serem uma forma muito simples de representação do solo, as molas empregadas na formulação do elemento finito devem ser utilizadas em simulações onde poucos parâmetros do solo estejam disponíveis. Em situações que exijam uma simulação mais complexa deve-se considerar a utilização de elementos de interface combinados a elementos sólidos para representação do solo.

Para trabalhos futuros, sugere-se a inclusão de imperfeições iniciais no alinhamento do duto. Além disso, recomendam-se análises que incluam a ovalização da seção transversal e/ou o efeito da flambagem local e análises que simulem o comportamento pós-flambagem de dutos. Para a avaliação do comportamento de pós-flambagem, uma opção seria a utilização do método *arc-length*.

Seria interessante, ainda, a realização de análises de fadiga e de vibração em dutos. Uma outra opção seria o estudo de um duto sujeito simultaneamente à torção e à flambagem. Além disso, pode-se estudar a influência de soldas, juntas, curvas, cotovelos e de tensões residuais no comportamento e na carga limite de dutos.

A inclusão de opções que simulem defeitos no duto combinados, ou não, às análises sugeridas acima também pode ser considerada em trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

AHAMMED, M. Prediction of remaining strength of corroded pressurised pipelines. **International Journal of Pressure Vessels and Piping**, v. 71, n. 3, pp. 213-217, mai. 1997.

AHN, S.; NAM, K.; TAKAHASHI, K.; ANDO, K. Comparison of experimental and finite element analytical results for the strength and the deformation of pipes with local wall thinning subjected to bending moment. **Nuclear Engineering and Design**, v. 236, n. 2, pp. 140-155, jan. 2006.

BARANGER, E.; ALLIX, O.; BLANCHARD, L. A computational strategy for the analysis of damage in composite pipelines. **Composites Science and Technology**, v. 69, n. 1, pp. 88-92, jan. 2009.

BATHE, K. J. **Finite element procedures in engineering analysis**. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1982.

BATHE, K. J. **Finite element procedures in engineering analysis**. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1996.

BEER, F. P.; JOHNSTON JR., E. R. **Resistência dos Materiais**. São Paulo: Makron Books, 1995.

BENJAMIN, A. C.; ANDRADE, E. Q. Flambagem lateral de dutos aquecidos: um método analítico clássico revisitado. In: SEMINAR ON PIPELINE, 3., 2001, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: Brazilian Petroleum and Gas Institute, 2001, IBP04601.

BENJAMIN, A. C.; ANDRADE, E. Q. Modified method for the assessment of the remaining strength of corroded pipelines. In: RIO PIPELINE CONFERENCE & EXPOSITION, 2003, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: Brazilian Petroleum and Gas Institute, 2003, IBP413_03.

BJØRSET, A.; REMSETH, S.; LEIRA, B. J.; LARSEN, C. M. Titanium pipes subjected to bending moment and external pressure. **Computers and Structures**, v. 81, n. 30-31, pp. 2691-2704, nov. 2003.

BRANCO A. G. M. **A mecânica dos materiais**. Lisboa: Orgal – Orlando & Ca. Ltda., 1985.

CARDOSO, C. O. **Metodologia para Análise e projeto de dutos submarinos submetidos a altas pressões e temperaturas via aplicação do método dos elementos finitos**. Rio de Janeiro, 2005, 583 f., Tese (Doutor em Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

ČERNÝ, I.; LINHART, V. An evaluation of the resistance of pipeline steels to initiation and early growth of stress corrosion cracks. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 71, n. 4-6, pp. 913-921, mar./abr. 2004.

CHEN, H. F.; LIU, Y. H.; CEN, Z. Z.; XU, B. Y. Numerical analysis of limit load and reference stress of defective pipelines under multi-loading systems. **International Journal of Pressure Vessels and Piping**, v. 75, n. 2, pp. 105-114, fev. 1998.

CHOI, J. B.; GOO, B. K.; KIM, J. C.; KIM, Y. J.; KIM, W. S. Development of limit load solutions for corroded gas pipelines. **International Journal of Pressure Vessels and Piping**, v. 80, n. 2, pp. 121-128, fev. 2003.

DA COSTA, A. M.; AMARAL, C. S.; CARDOSO, C. O.; ANDUEZA, A. Soil-structure interaction of heated pipeline buried in soft clay. In: INTERNATIONAL PIPELINE CONFERENCE, 4., 2002, Calgary, Alberta, Canada. **Anais...** Calgary, Alberta, Canada: American Society of Mechanical Engineers (ASME), 2002, IPC2002-27193.

DINIZ, J. L. C. **Resistência de dutos com defeitos usinados**. Rio de Janeiro, 2002, 116 f., Dissertação (Mestre em Ciências) – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

DVORKIN, E. N.; TOSCANO, R. G. Finite element models in the steel industry: Part II: Analyses of tubular products performance. **Computers & Structures**, v. 81, n. 8-11, pp. 575-594, mai. 2003.

FATT, M. S. H.; XUE, J. Propagating buckles in corroded pipelines. **Marine Structures**, v. 14, n. 6, pp. 571-592, nov./dez. 2001.

FONSECA, E. M. M.; DE MELO, F. J. M. Q.; OLIVEIRA, C. A. M. The thermal and mechanical behaviour of structural steel piping systems. **International Journal of Pressure Vessels and Piping**, v. 82, n. 2, pp. 145-153, fev. 2005.

FREITAS, S. M. S. **Ferramentas numéricas para análise e projeto de dutos e risers na exploração de petróleo**. Rio de Janeiro, 2006, 261 f., Tese (Doutor em Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

GUIMARÃES, A. C. B. **Avaliação simplificada da capacidade de carga de dutos corroídos**. Curitiba, 2005, 126 f., Dissertação (Mestre em Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná.

GUIMARÃES, G. P. **Uma formulação de elementos finitos axissimétricos para análise de tubos laminados em materiais compósitos**. Rio de Janeiro, 2006, 120 f., Dissertação (Mestre em Ciências) – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

HOBBS, R. E. Pipeline buckling caused by axial loads. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 1, n. 2, pp. 2-10, jan. 1981.

HOBBS, R. E. In-service buckling of heated pipelines. **Journal of Transportation Engineering**, v. 110, n. 2, pp. 175-189, mar. 1984.

JAYADEVAN, K. R.; ØSTBY, E.; THAULOW, C. Fracture response of pipelines subjected to large plastic deformation under tension. **International Journal of Pressure Vessels and Piping**, v. 81, n. 9, pp. 771-783, set. 2004.

JU, G. T.; KYRIAKIDES, S. Thermal Buckling of Offshore Pipelines. **Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering**, v. 110, pp. 355-364, nov. 1988.

KARAMANOS, S. A. Bending instabilities of elastic tubes. **International Journal of Solids and Structures**, v. 39, n. 8, pp. 2059-2085, abr. 2002.

KERR, A. D. Analysis of thermal track buckling in the lateral plane. **Acta Mechanica**, v. 30, n. 1-2, pp. 17-50, 1978.

KIM, Y.; SON, B. Finite element based stress concentration factors for pipes with local wall thinning. **International Journal of Pressure Vessels and Piping**, v. 81, n. 12, pp. 897-906, dez. 2004.

LÁZARO, F. P. **Análise não-linear da iteração solo-duto em encostas empregando elementos de interface**. Curitiba, 2004, 112 f., Dissertação (Mestre em Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná.

LOTSBERG, I. Stress concentration factors at welds in pipelines and tanks subjected to internal pressure and axial force. **Marine Structures**, v. 21, n. 2-3, pp. 138-159, abr./jul. 2008.

MACHADO, A. C. **Um elemento finito de tubo tridimensional para análise geometricamente não linear de dutos**. Maceió, 2006, 100 f., Dissertação (Mestre em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas.

MALTBY, T. C.; CALLADINE, C. R. An investigation into upheaval buckling of buried pipelines – I. Experimental apparatus and some observations. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 37, n. 9, pp. 943-963, set. 1995a.

MALTBY, T. C.; CALLADINE, C. R. An investigation into upheaval buckling of buried pipelines – II. Theory and analysis of experimental observations. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 37, n. 9, pp. 965-983, set. 1995b.

MASSA, A. L. L. **Contribuição ao estudo de Flambagem em dutos rígidos submarinos conduzindo fluidos aquecidos**. Rio de Janeiro, 2003, 104 f., Dissertação (Mestre em Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

MEJÍA, I. O. **Modelo numérico para o estudo do comportamento de dutos enterados**. Rio de Janeiro, 2003, 97 f., Dissertação (Mestre em Ciências) – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

MOSER, A. P. **Buried pipe design**. 2. ed. New York: McGraw-Hill 2001.

MURRAY, D. W. Local buckling, strain localization, wrinkling and postbuckling response of line pipe. **Engineering Structures**, v. 19, n. 5, pp. 360-371, mai. 1997.

NOWZARTASH, F.; MOHAREB, M. An elasto-plastic finite element for steel pipelines. **International Journal of Pressure Vessels and Piping**, v. 81, n. 12, pp. 919-930, dez. 2004.

ØSTBY, E.; JAYADEVAN, K. R.; THAULOW, C. Fracture response of pipelines subjected to large plastic deformation under tension. **International Journal of Pressure Vessels and Piping**, v. 82, n. 3, pp. 201-215, set. 2005.

PAQUETTE, J. A.; KYRIAKIDES, S. Plastic buckling of tubes under axial compression and internal pressure. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 48, n. 8, pp. 855-867, ago. 2006.

PASQUALINO, I. P.; ESTEFEN, S. F. A nonlinear analysis of the buckle propagation problem in deepwater pipelines. **International Journal of Solids and Structures**, v. 38, n. 46-47, pp. 8481-8502, nov. 2001.

PAVLOU, D. G.; VLACHAKIS, N. V.; TSITOURAS, Ch.; PAVLOU, M. G.; FATSIS, A. Creep sagging analysis of pressure pipes. **Computational Materials Science**, v. 36, n. 3, pp. 303-309, jun. 2006.

PEDERSEN, P.T.; JENSEN, J.J. Upheaval Creep of Buried Heated Pipelines with Initial Imperfections. **Marine Structures**, v. 1, n. 1, pp. 11-22, 1988.

PINTO, C. S., **Curso Básico de Mecânica dos Solos**. São Paulo: Oficina de Textos, 2000.

PLUVINAGE, G. Pipe-defect assessment based on the limit analysis, failure-assessment diagram, and subcritical crack growth. **Materials Science**, v. 42, n. 1, pp. 127-139, jan./fev. 2006.

RAVET, F.; ZOU, L.; BAO, X.; CHEN, L.; HUANG, R. F.; KHOO, H. A. Detection of buckling in steel pipeline and column by the distributed Brillouin sensor. **Optical Fiber Technology**, v. 12, n. 4, pp. 305-311, out. 2006.

ROEHL, D. M. **Uma metodologia para a análise não-linear geométrica de pórticos espaciais com liberações de extremidade de barra e cargas distribuídas**. Rio de Janeiro, 1987, Dissertação (Mestre em Ciências) – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

ROBERTSON, A.; LI, H.; MACKENZIE, D. Plastic collapse of pipe bends under combined internal pressure and in-plane bending. **International Journal of Pressure Vessels and Piping**, v. 82, n. 5, pp. 407-416, mai. 2005.

ŞANAL, Z. Nonlinear analysis of pressure vessels: some examples. **International Journal of Pressure Vessels and Piping**, v.77, n. 12, pp. 705-709, out. 2000.

SOUZA, L. A. F. **Análise não linear via elementos finitos de um modelo de vigas para dutos enterrados**. Curitiba, 2005, 135 f., Dissertação (Mestre em Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná.

VALENTINI, M. D. **Avaliação dos métodos semi-empíricos para análise de dutos corroídos subsidiado pelo método dos elementos finitos**. Curitiba, 2009, 128 f., Dissertação (Mestre em Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

VAZ, M. A.; PATEL M. H. Lateral buckling of bundled pipe systems. **Marine Structures**, v. 12, n. 1, pp. 21-40, jan. 1999.

WATASHI, K.; IWATA K. Thermal buckling and progressive ovalization of pipes: experiences at the TTS sodium test facility and their analysis. **Nuclear Engineering and Design**, v. 153, n. 2-3, pp. 319-330, jan. 1995.

WATKINS, R. K.; ANDERSON, L. R. **Structural mechanics of buried pipes**. New York: CRC Press LLC, 2000.

ZARAS, J. Analysis of an industrial piping installation under buckling propagation. **Thin-Walled Structures**, v. 46, n. 7-9, pp.855-859, jul./set. 2008.

ZHANG, C.; BAO, X.; OZKAN, I. F.; MOHAREB, M.; RAVET, F.; DU, M.; DIGIOVANNI, D. Prediction of the pipe buckling by using broadening factor with

distributed Brillouin fiber sensors. **Optical Fiber Technology**, v. 14, n. 2, pp. 109-113, abr. 2008.

ZHOU, Z.; MURRAY, D. W. Analysis of postbuckling behavior of line pipe subjected to combined loads. **International Journal of Solids and Structures**, v. 32, n. 20, pp. 3015-3036, out. 1995.

ZHOU, Z.; MURRAY, D. W. Pipeline Beam Models Using Stiffness Property Deformation Relations. **Journal of Transportation Engineering**, ASCE, v. 122, n. 2, p. 164-172, 1996.

ZHU, X.; LEIS, B. N. Strength criteria and analytic predictions of failure pressure in line pipes. **International Journal of Offshore and Polar Engineering**, v. 14, n. 2, pp. 125-131, jun. 2004.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method**. 5. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. v. 2: Solid Mechanics.

APÊNDICES

APÊNDICE A - SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

A equação básica do método dos elementos finitos para análise estática é dada pela Equação (A.1). Esta equação, segundo Bathe (1996) e Zienkiewicz e Taylor (2000), corresponde a uma análise linear de um problema estrutural, pois a resposta ao deslocamento \mathbf{U} é uma função linear do vetor de carga aplicada \mathbf{R} . Quando este não for o caso, deve-se realizar uma análise não-linear.

$$\mathbf{KU} = \mathbf{R} \quad (\text{A.1})$$

A tabela A.1 apresenta uma convenção que é usada comumente, pois considera separadamente os efeitos não-lineares materiais e os efeitos não-lineares geométricos.

TABELA A.1 – CLASSIFICAÇÃO DE ANÁLISES NÃO-LINEARES

Tipo de Análise	Descrição	Formulação típica utilizada	Cálculo da tensão e deformação
Apenas não-linear material	Deformações e tensões infinitesimais; a relação tensão-deformação é não-linear.	Somente material não-linear	Tensão e deformação de engenharia
Grandes deslocamentos, grandes rotações, mas pequenas deformações	Deslocamentos e rotações de fibras são grandes, mas as extensões das fibras e as alterações de ângulo entre as fibras são pequenas; a relação tensão-deformação pode ser linear ou não linear.	Lagrangeana Total (LT)	Segunda tensão de Piola-Kirchhoff, deformação de Green-Lagrange.
		Lagrangeana Atualizada (LA)	Tensão de Cauchy, deformação de Almansi.
Grandes deslocamentos, grandes rotações e grandes deformações	As extensões de fibras e as alterações de ângulo são grandes, deslocamentos e rotações de fibras podem ser grandes, a relação tensão-deformação pode ser linear ou não-linear.	Lagrangeana Total (LT)	Segunda tensão de Piola-Kirchhoff, deformação de Green-Lagrange.
		Lagrangeana Atualizada (LA)	Tensão de Cauchy, deformação logarítmica.

Fonte: Bathe (1996)

O problema básico em uma análise não-linear geral consiste em encontrar um estado de equilíbrio correspondente aos carregamentos aplicados para um determinado corpo. Assumindo que os carregamentos externos são descritos como função do tempo, as condições de equilíbrio de um sistema de elementos finitos, representando o corpo em consideração, pode ser expressa conforme a Equação (A.2), onde o vetor ${}^t\mathbf{R}$ lista as forças externas aplicadas nos pontos nodais na configuração do tempo t e o vetor ${}^t\mathbf{F}$ lista as forças nos pontos nodais que correspondem às tensões do elemento nesta configuração (BATHE,1996).

$${}^t\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (\text{A.2})$$

De acordo com Bathe (1996), como para os resultados de uma análise para serem calculados, em muitos casos, apenas as tensões e os deslocamentos alcançados em um nível específico de carregamento ou em tempo específico são necessários. Em algumas análises não-lineares a configuração de equilíbrio correspondente a esses níveis de carregamentos pode ser calculada sem que outras configurações de equilíbrio sejam resolvidas. Entretanto, quando a análise incluir não-linearidade geométrica ou condições materiais dependentes do desenvolvimento, ou um fenômeno dependente do tempo, a relação de equilíbrio da Equação (A.2) deve ser resolvida para o completo intervalo de tempo de interesse. Conforme Bathe (1996), este cálculo de resposta é conduzido efetivamente utilizando-se uma solução incremental passo a passo, a qual se reduz a uma análise de um passo caso se trate de uma solução estática independente do tempo, ou se o carregamento total for aplicado de uma vez e apenas a configuração correspondente a este carregamento é calculada.

Ainda segundo Bathe (1996), a hipótese básica, de uma solução incremental passo a passo, é assumir que a solução para o tempo discreto t é conhecida e que a solução para o tempo $t + \Delta t$ é requerida, onde Δt é incremento de tempo escolhido apropriadamente. Portanto, considerando-se a Equação (A.2) no tempo $t + \Delta t$ obtém-se a Equação (A.3).

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (\text{A.3})$$

Ambos os vetores da Equação (A.3) são determinados através do princípio dos deslocamentos virtuais. Desde que as forças nos pontos nodais dependam não-linearmente dos deslocamentos nodais, é necessário iterar na solução da Equação (A.3). Bathe (1996) assume que, na iteração de Newton-Raphson, os carregamentos são independentes das deformações. Assim sendo e linearizando a resposta do sistema de elementos finitos sobre as condições no tempo $t + \Delta t$, iteração $(i - 1)$, resolve-se para $i = 1, 2, 3, \dots$ as Equações (A.4) a (A.6).

$$\Delta \mathbf{R}^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)} \quad (\text{A.4})$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = \Delta \mathbf{R}^{(i-1)} \quad (\text{A.5})$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(i)} \quad (\text{A.6})$$

Com

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(0)} = {}^t\mathbf{U}; \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(0)} = {}^t\mathbf{F} \quad (\text{A.7})$$

Em cada iteração calcula-se, através da Equação (A.4), um vetor de carga desbalanceado que fornece um incremento nos deslocamentos obtidos com a utilização da Equação (A.5). A iteração deve continuar até que os vetores de carregamentos desbalanceados $\Delta \mathbf{R}^{(i-1)}$ ou de incrementos de deslocamentos $\Delta \mathbf{U}^{(i)}$ sejam suficientemente pequenos.

Souza (2005), baseado em Roehl (1987), coloca que os procedimentos incrementais e iterativos consideram incrementos de cargas com iterações de equilíbrio realizadas dentro de cada passo. O desempenho da análise depende do parâmetro de incremento de carga adotado e a escolha de um incremento adequado é estabelecida de acordo com o número de iterações necessárias para atingir o equilíbrio dentro de cada passo. Ainda segundo Souza (2005), outro fator importante a ser considerado é o procedimento de convergência, pois, para um determinado problema, alguns métodos atingem a solução procurada enquanto outros não.

Nas seções a seguir são apresentados os métodos iterativos de Newton-Raphson e de Newton-Raphson modificado. Em seguida, são apresentados os critérios de convergência.

A.1 MÉTODOS DE NEWTON-RAPHSON E TÉCNICAS RELACIONADAS

De acordo com Bathe (1996), os métodos mais freqüentemente utilizados para a solução de equações não-lineares de elementos finitos são a iteração de Newton-Raphson e técnicas intimamente relacionadas.

Nas formulações do método de Newton-Raphson e das técnicas relacionadas à condição de equilíbrio do elemento finito consiste em encontrar a solução das equações em (A.8)

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}^*) = \mathbf{0} \quad (\text{A.8})$$

Onde

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}^*) = \mathbf{R}(\mathbf{U}^*) - \mathbf{F}(\mathbf{U}^*) \quad (\text{A.9})$$

O método de Newton-Raphson é, segundo Zienkiewicz e Taylor (2000), o que converge mais rapidamente, pois é um dos únicos métodos em que a taxa assintótica de convergência é quadrática.

Nas seções subseqüentes são apresentadas as formulações dos processos iterativos completo e modificado de Newton-Raphson, além da formulação do método da tensão inicial. Estas formulações foram baseadas nas apresentadas por Bathe (1996).

A.1.1 Método Completo de Newton-Raphson

Utilizando uma expansão da série de Taylor e assumindo que na solução iterativa tenha sido determinado ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)}$, obtém-se a Equação (A.10).

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}^*) = \mathbf{f}({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)}) + \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}} \right]_{{}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)}} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^* - {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)}) + \text{termos de ordem maior} \quad (\text{A.10})$$

Substituindo a Equação (A.9) na Equação (A.10) e usando a Equação (A.8), obtém-se a Equação (A.11). Nesta equação, assume-se que os carregamentos aplicados externamente são independentes da deformação.

$$\left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \right]_{{}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)}} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^* - {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)}) + \text{termos de ordem maior} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)} \quad (\text{A.11})$$

Negligenciando os termos de ordem maior da Equação (A.11), o incremento de deslocamentos é calculado conforme a Equação (A.12). A matriz de rigidez corrente ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)}$ é dada pela Equação (A.13) e a solução aperfeiçoada do deslocamento é dada pela Equação (A.14).

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)} \quad (\text{A.12})$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)} = \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \right]_{{}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)}} \quad (\text{A.13})$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(i)} \quad (\text{A.14})$$

As Equações (A.12) e (A.14) constituem a solução de Newton-Raphson da Equação (A.3). Desde que uma análise incremental seja realizada com passos de tempo (ou de carga) de tamanho Δt , as condições iniciais nesta iteração são as dadas pelas

Equações (A.15) a (A.17). O processo iterativo é continuado até que critério de convergência apropriado seja satisfeito.

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(0)} = {}^t\mathbf{K} \quad (\text{A.15})$$

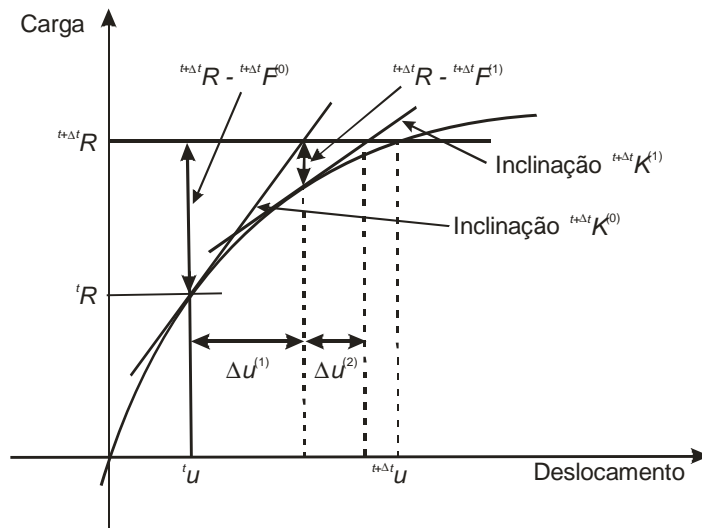
$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(0)} = {}^t\mathbf{F} \quad (\text{A.16})$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(0)} = {}^t\mathbf{U} \quad (\text{A.17})$$

Uma característica deste processo iterativo é que uma nova matriz de rigidez tangente é calculada em cada iteração, motivo pelo qual este método é conhecido como método completo de Newton-Raphson. Métodos em que a matriz de rigidez tangente corrente não é utilizada não são métodos completos de Newton-Raphson, mas sim técnicas relacionadas.

O processo de solução para um sistema de um grau de liberdade é ilustrado pela Figura (A.1). As características da resposta não-linear são tais que a convergência é rapidamente obtida. Entretanto, na solução de sistemas com vários graus de liberdade as curvas de resposta serão, em geral, não-homogêneas e complicadas.

FIGURA A.1 – RELAÇÃO CARGA-DESLOCAMENTO



Fonte: Bathe (1996).

Considerando o processo iterativo de Newton-Raphson, o maior custo computacional por iteração reside no cálculo e fatorização da matriz de rigidez tangente. Co-

mo estes cálculos podem ser extremamente caros quando sistemas de grande ordem são considerados, o uso de uma modificação do método completo de Newton-Raphson pode ser levada em conta.

A.1.2 Método da Tensão Inicial

Uma modificação comum é a utilização da matriz de rigidez inicial ${}^0\mathbf{K}$ na Equação (A.12), que resulta na Equação (A.18). As condições iniciais dadas pelas Equações (A.16) e (A.17). Nesse caso apenas a matriz ${}^0\mathbf{K}$ precisa ser fatorizada, logo evita-se o custo em recalcular e fatorizar muitas vezes a matriz de coeficientes da Equação (A.12).

$${}^0\mathbf{K} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)} \quad (\text{A.18})$$

Este método, conhecido como método da tensão inicial, corresponde a linearização da resposta sobre a configuração inicial do sistema de elementos finitos e pode convergir muito lentamente e até divergir.

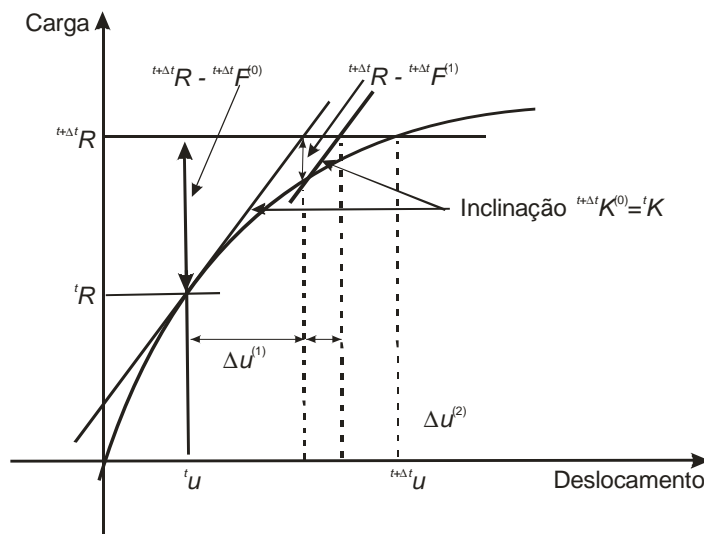
A.1.3 Método Modificado de Newton-Raphson

No método modificado de Newton-Raphson, uma aproximação de certa forma entre o processo iterativo completo de Newton-Raphson e o método da tensão inicial é empregada. Nesse método, utiliza-se a Equação (A.19) onde as condições iniciais são as dadas pelas Equações (A.16) e (A.17) e τ corresponde a uma das configurações de equilíbrio aceitas nos tempos $0, \Delta t, 2 \Delta t, \dots$, ou t .

$${}^\tau\mathbf{K} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)} \quad (\text{A.19})$$

O processo iterativo modificado de Newton-Raphson envolve menos modificações na rigidez do que o processo iterativo completo de Newton-Raphson e mantém a atualização da matriz de rigidez em uma configuração de equilíbrio aceitável. A Figura (A.2) apresenta o desempenho do método modificado de Newton-Raphson para o mesmo sistema considerado na Figura (A.1).

FIGURA A.2 – MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON MODIFICADO



Fonte: Bathe (1996).

A.2 CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

A adoção de uma estratégia baseada em métodos iterativos deve utilizar um critério que estabeleça o fim do processo iterativo para ser efetivada. Segundo Bathe (1996), ao fim de cada iteração a solução obtida deve ser verificada focando se houve convergência dentro das tolerâncias pré-estabelecidas ou se a iteração está divergindo. Se as tolerâncias de convergência forem esparsas, resultados imprecisos podem ser obtidos, e se forem muito restritas, um esforço computacional muito grande pode ser gasto para se obter resultados com uma acurácia desnecessária. Ainda de acordo com Bathe (1996), uma verificação ineficaz da divergência pode terminar a iteração quando a solução não está realmente divergindo ou forçar a iteração a procurar uma solução

inatingível. A seguir, serão apresentados três critérios de convergência cujas metodologias foram retiradas de Bathe (1996).

A.2.1 Critério Baseado nos Deslocamentos

Como procura-se a configuração de deslocada correspondente ao tempo $t + \Delta t$, é natural que os deslocamentos ao fim de cada iteração estejam dentro de uma certa tolerância da solução dos deslocamentos reais. Portanto, um critério de convergência aceitável é dado pela Equação (A.20), onde ϵ_D é a tolerância de convergência dos deslocamentos,

$\|\Delta \mathbf{U}^{(i)}\|_2 = \sum_{j=1}^{n_{gl}} \Delta U_j^{(i)2}$ é a norma euclidiana do vetor $\Delta \mathbf{U}^{(i)}$ e

$\|{}^{t+\Delta t} \mathbf{U}\|_2 = \sum_{j=1}^{n_{gl}} {}^{t+\Delta t} U_j^2$ é a norma Euclidiana do vetor ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}$.

$$\frac{\|\Delta \mathbf{U}^{(i)}\|_2}{\|{}^{t+\Delta t} \mathbf{U}\|_2} \leq \epsilon_D \quad (\text{A.20})$$

O vetor ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}$ é desconhecido e deve ser aproximado. Frequentemente, na Equação (A.20), a utilização do último valor calculado de ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)}$ como uma aproximação de ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}$ e um valor suficientemente pequeno de ϵ_D . Entretanto, em algumas análises, quando a convergência é avaliada utilizando-se a Equação (A.20) com ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)}$, a solução atual pode estar distante do valor obtido. Isto pode ocorrer quando os deslocamentos calculados mudam pouco a cada iteração, mas continuam a variar por várias iterações, como pode ocorrer, por exemplo, em análises elásto-plásticas sob condições de carregamento quando o método modificado de Newton-Raphson é usado.

A.2.2 Critério Baseado no Vetor de Carga Desbalanceado

É possível obter-se um outro critério de convergência avaliando-se o vetor de carga desbalanceado, conforme a Equação (A.21). Nesta equação a norma do vetor de carga desbalanceado deve estar dentro de uma tolerância ϵ_F pré-estabelecida da carga incremental original.

$$\left\| {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i)} \right\|_2 \leq \epsilon_F \left\| {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F} \right\|_2 \quad (\text{A.21})$$

Este critério apresenta como dificuldade a não inclusão da solução dos deslocamentos no critério de parada. Considerando um caso de estruturas em plastificação com um módulo de encruamento pequeno, os vetores de cargas podem ser muito pequenos enquanto os deslocamentos ainda podem estar incorretos.

A.2.3 Critério Baseado na Energia Interna

A fim de prover alguma indicação de quando tanto os deslocamentos, quanto as forças estão próximas dos valores de equilíbrio, a adoção de um critério que compare a energia interna incremental em cada iteração com o incremento de energia interna inicial pode se útil, uma vez que o incremento de energia interna consiste na quantidade de trabalho realizado por uma carga desbalanceada no incremento de deslocamento. Neste critério, assume-se que a convergência foi atingida quando a Equação (A.22), onde ϵ_E é a tolerância de energia pré-estabelecida, for satisfeita.

$$\Delta \mathbf{U}^{(i)T} \left({}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)} \right) \leq \epsilon_E \left(\Delta \mathbf{U}^{(1)T} \left({}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F} \right) \right) \quad (\text{A.22})$$

O presente trabalho utiliza o método modificado de Newton-Raphson e como o critério de convergência baseado na energia interna é o mais completo, este foi o critério de convergência adotado neste trabalho.

APÊNDICE B - SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

É muito comum a ocorrência de problemas de autovalores e autovetores em análises numéricas. Dentre os mais recorrentes, de acordo com Bathe (1996), estão os problemas de vibração, de flambagem e de transferência de calor.

O problema de autovalores e autovetores padrão, dado pela Equação (B.1), é a versão mais simples encontrada. Já a forma generalizada do problema de autovalores e autovetores, dada pela Equação (B.2), é o mais comum em elementos finitos.

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\psi} = \omega\boldsymbol{\psi} \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\psi} = \omega\mathbf{M}\boldsymbol{\psi} \quad (\text{B.2})$$

É importante observar que a forma generalizada pode ser reduzida à forma padrão do problema de autovalores e autovetores, conforme apresentado pela Equação (B.3). Outro ponto interessante é o fato de que o problema generalizado se reduz a forma padrão quando a matriz \mathbf{M} é uma matriz identidade.

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\boldsymbol{\psi} = \mathbf{A}\boldsymbol{\psi} = \omega\boldsymbol{\psi} \quad (\text{B.3})$$

Os métodos numéricos para solução dos problemas de autovalores e autovetores podem ser divididos em basicamente quatro grupos: métodos de iteração vetorial, métodos de transformação, técnicas de iteração polinomial e técnicas de aplicação da sequência de Sturm (BATHE, 1996).

Segundo Bathe (1996), dentre todos os métodos disponíveis para solução dos problemas de autovalores e autovetores, o método de Jacobi e o método QR, pertencentes ao grupo dos métodos de transformação, são os mais indicados para a análise em elementos finitos.

O método QR possui a limitação de ser aplicável apenas na solução do problema padrão de autovalores e autovetores. Portanto, se for considerado o problema generalizado de autovalores e autovetores, será necessária a transformação do problema generalizado para a forma padronizada. Como esta transformação é muito cara do ponto de vista computacional, pois envolve a inversão da matriz \mathbf{M} , e é factível apenas para alguns casos, o emprego de um método que dispense essa transformação é de suma importância para a melhora de desempenho computacional. Esse é o caso do método generalizado de Jacobi, que será apresentado a seguir, cuja formulação foi baseada em Bathe (1996).

B.1 O MÉTODO GENERALIZADO DE JACOBI

Como já mencionado anteriormente, o método generalizado de Jacobi pertence ao grupo dos métodos de transformação. Estes métodos agrupam os autovalores e os autovetores em matrizes, conforme apresentado pelas Equações (B.4) A (B.7).

$$\mathbf{\Psi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Psi} = \mathbf{\Omega} \quad (\text{B.4})$$

$$\mathbf{\Psi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Psi} = \mathbf{I} \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{\Psi} = [\psi_1, \dots, \psi_n] \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{\Omega} = \text{diag}(\omega_i), i = 1, \dots, n \quad (\text{B.7})$$

Como a matriz dos autovetores $\mathbf{\Psi}$ (de ordem $n \times n$), que diagonaliza as matrizes \mathbf{K} e \mathbf{M} do modo dado pelas Equações (B.4) e (B.5), é única, é possível construí-la por iteração. O esquema básico consiste em reduzir \mathbf{K} e \mathbf{M} a forma diagonal utilizando sucessivas pré- e pós-multiplicações por matrizes \mathbf{P}_k^T e \mathbf{P}_k , respectivamente, onde $k = 1, 2, \dots$. Definindo $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}$ e $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}$, formam-se as Equações (B.8) e (B.9).

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_2 &= \mathbf{P}_1^T \mathbf{K}_1 \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{K}_3 &= \mathbf{P}_2^T \mathbf{K}_2 \mathbf{P}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{K}_{k+1} &= \mathbf{P}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{P}_k \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.8})$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}_2 &= \mathbf{P}_1^T \mathbf{M}_1 \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{M}_3 &= \mathbf{P}_2^T \mathbf{M}_2 \mathbf{P}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{M}_{k+1} &= \mathbf{P}_k^T \mathbf{M}_k \mathbf{P}_k \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.9})$$

As matrizes \mathbf{P}_k^T e \mathbf{P}_k são selecionadas de forma a trazer \mathbf{K}_k e \mathbf{M}_k o mais próximo da forma diagonal possível. Assim, para um procedimento correto, deve-se ter $\mathbf{K}_{k+1} \rightarrow \mathbf{\Omega}$ e $\mathbf{M}_{k+1} \rightarrow \mathbf{I}$ com $k \rightarrow \infty$, caso no qual, com l sendo a última iteração obtém-se a Equação (B.10).

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \dots \mathbf{P}_l \quad (\text{B.10})$$

Na prática, não é necessário que \mathbf{M}_{k+1} caminhe para \mathbf{I} e \mathbf{K}_{k+1} para $\mathbf{\Omega}$, mas eles devem convergir para a forma diagonal. Especificamente, se $\mathbf{K}_{k+1} \rightarrow \text{diag}(K_r)$ e $\mathbf{M}_{k+1} \rightarrow \text{diag}(M_r)$ com $k \rightarrow \infty$, então com l indicando a última iteração e ignorando o fato de que os autovalores e autovetores podem não estar na ordem usual, obtêm-se as Equações (B.11) e (B.12).

$$\mathbf{\Omega} = \text{diag} \left(\frac{K_r^{(l+1)}}{M_r^{(l+1)}} \right) \quad (\text{B.11})$$

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \dots \mathbf{P}_l \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{M_r^{(l+1)}}} \right) \quad (\text{B.12})$$

Da Equação (B.4) até a Equação (B.12) o procedimento é o mesmo para todos os métodos do grupo dos métodos de transformação. No método generalizado de Jacobi utiliza-se a matriz \mathbf{P}_k dada pela Equação (B.13).

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \alpha & \\ & & & \gamma & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} i\text{-ésima} \\ j\text{-ésima coluna} \\ \\ \\ i\text{-ésima} \\ j\text{-ésima linha} \end{array} \quad (\text{B.13})$$

As constantes α e γ são escolhidas de forma a reduzir a zero simultaneamente os elementos (i,j) em \mathbf{K}_k e em \mathbf{M}_k . Portanto, os valores de α e γ são funções dos elementos $k_{ij}^{(k)}, k_{ii}^{(k)}, k_{jj}^{(k)}, m_{ij}^{(k)}, m_{ii}^{(k)},$ e $m_{jj}^{(k)}$, onde os sobrescritos (k) indicam que a k -ésima iteração está sendo considerada. Realizando as multiplicações $\mathbf{P}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{P}_k$ e $\mathbf{P}_k^T \mathbf{M}_k \mathbf{P}_k$ e utilizando a condição de que $k_{ij}^{(k+1)}$ e $m_{ij}^{(k+1)}$ devem ser nulos, obtêm-se as Equações (B.14) e (B.15) que ocorrem apenas se a Equação (B.16) for respeitada.

$$\alpha k_{ii}^{(k)} + (1 + \alpha\gamma)k_{ij}^{(k)} + \gamma k_{jj}^{(k)} = 0 \quad (\text{B.14})$$

$$\alpha m_{ii}^{(k)} + (1 + \alpha\gamma)m_{ij}^{(k)} + \gamma m_{jj}^{(k)} = 0 \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{k_{ii}^{(k)}}{m_{ii}^{(k)}} = \frac{k_{jj}^{(k)}}{m_{jj}^{(k)}} = \frac{k_{ij}^{(k)}}{m_{ij}^{(k)}} \quad (\text{B.16})$$

Em geral, para obter α e γ a partir das Equações (B.14) e (B.15), são definidas as Equações (B.17) a (B.19). O valor de x , presente nas Equações (B.18) e (B.19) é dado pela Equação (B.20).

$$\left. \begin{aligned} \bar{k}_{ii}^{(k)} &= k_{ii}^{(k)} m_{ij}^{(k)} - m_{ii}^{(k)} k_{ij}^{(k)} \\ \bar{k}_{jj}^{(k)} &= k_{jj}^{(k)} m_{ij}^{(k)} - m_{jj}^{(k)} k_{ij}^{(k)} \\ \bar{k}^{(k)} &= k_{ii}^{(k)} m_{jj}^{(k)} - k_{jj}^{(k)} m_{ii}^{(k)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.17})$$

$$\gamma = -\frac{\bar{k}_{ii}^{(k)}}{x} \quad (\text{B.18})$$

$$\alpha = \frac{\bar{k}_{jj}^{(k)}}{x} \quad (\text{B.19})$$

$$x = \frac{\bar{k}^{(k)}}{2} + \text{sinal}(\bar{k}^{(k)}) \sqrt{\left(\frac{\bar{k}^{(k)}}{2}\right)^2 + \bar{k}_{ii}^{(k)} \bar{k}_{jj}^{(k)}} \quad (\text{B.20})$$

As relações para α e γ foram primeiramente desenvolvidas para o caso de \mathbf{M} ser uma matriz positiva definida cheia ou com bandas. Nesse caso, têm-se a Equação (B.21), que leva a conclusão de que x sempre será não-nulo. Além disso, o determinante de \mathbf{P}_k será diferente de zero, que é a condição necessária para que o método funcione.

$$\left(\frac{\bar{k}^{(k)}}{2}\right)^2 + \bar{k}_{ii}^{(k)} \bar{k}_{jj}^{(k)} > 0 \quad (\text{B.21})$$

A convergência do método é obtida pela comparação das sucessivas aproximações dos autovalores e testando se todos os elementos fora da diagonal são suficientemente pequenos, isto é, com l sendo a última iteração, a convergência será atingida se a Equação (B.22) for respeitada. Nesta equação 10^{-s} é a tolerância de convergência.

$$\frac{|\omega_i^{(l+1)} - \omega_i^{(l)}|}{\omega_i^{(l+1)}} \leq 10^{-s}; \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{B.22})$$

Sendo

$$\omega_i^{(l)} = \frac{k_{ii}^{(l)}}{m_{ii}^{(l)}}; \quad \omega_i^{(l+1)} = \frac{k_{ii}^{(l+1)}}{m_{ii}^{(l+1)}} \quad (\text{B.23})$$

e

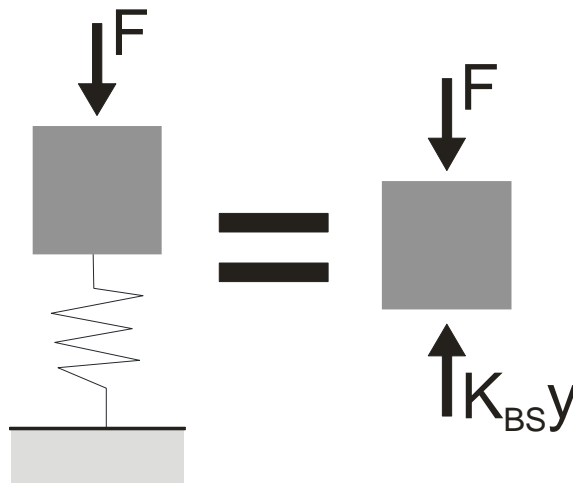
$$\left[\frac{\left(k_{ij}^{(l+1)}\right)^2}{k_{ii}^{(l+1)}k_{jj}^{(l+1)}} \right]^{1/2} \leq 10^{-s}; \quad \left[\frac{\left(m_{ij}^{(l+1)}\right)^2}{m_{ii}^{(l+1)}m_{jj}^{(l+1)}} \right]^{1/2} \leq 10^{-s}; \quad \text{todo } i, j; i < j \quad (\text{B.24})$$

APÊNDICE C - PROCEDIMENTO PARA CÁLCULO DA CONSTANTE DE RIGIDEZ DE MOLA POR UNIDADE DE COMPRIMENTO

De posse das propriedades mecânicas do solo, é possível obter a constante de rigidez de mola por unidade de comprimento de representação do solo de base (κ_{BS}). Para tanto, a relação de equilíbrio apresentada pela Equação (C.1), e ilustrada pela Figura C.1, deve ser respeitada.

$$F = K_{BS} y \quad (C.1)$$

FIGURA C.1 – RELAÇÃO DE EQUILÍBRIO NECESSÁRIA



Dividindo-se a Equação (C.1) pelo comprimento total do duto (L), obtém-se a Equação (C.2).

$$q = \kappa_{BS} y \quad (C.2)$$

O cálculo do recalque do solo (y) pela teoria da elasticidade, de acordo com Pinto (2000), pode ser obtido com o uso da Equação (C.3). Nesta equação i_s é um fator de forma, função do diâmetro externo (D_e) e do comprimento (L) do duto, obtido atra-

vés da Equação (C.4). Para obtenção da Equação (C.4) fez-se uma interpolação dos diversos valores de i_s apresentados por Pinto (2000).

$$y = i_s \frac{p_s D_e}{E_s} (1 - \nu_s^2) \quad (C.3)$$

$$i_s = 0.5005 \ln \left(\frac{L}{D_e} \right) + 0.8463 \quad (C.4)$$

A pressão uniformemente distribuída sobre o solo (p_s) é dada pela Equação (C.5). Com a substituição desta equação na Equação (C.3), tem-se a Equação (C.6)

$$p_s = \frac{F}{LD_e} = \frac{q}{D_e} \quad (C.5)$$

$$y = i_s \frac{q}{E_s} (1 - \nu_s^2) \quad (C.6)$$

Finalmente, com a substituição da Equação (C.6) na Equação (C.2) e manipulando-se apropriadamente, obtém-se a Equação (C.7) para o cálculo do coeficiente de rigidez de mola por unidade de comprimento de representação do solo de base.

$$\kappa_{BS} = \frac{E_s}{i_s (1 - \nu_s^2)} \quad (C.7)$$